ESERCIZIO 4

Cerchiamo uno sviluppo asintotico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1-e^{-x})} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$$
$$= \frac{x^2-(1-e^{-x})\operatorname{sen} x}{x^3(1-e^{-x})}$$

in un intorno di $x=0$.

Ricordando i limiti notevoli: $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$, $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$

si vede subito che $x^2+(e^{-x}-1)\operatorname{sen} x = o(x^2)$.

Dagli sviluppi di Taylor: $\operatorname{sen} t = t + o(t^2)$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

si ottiene:

$$x^2+(e^{-x}-1)\operatorname{sen} x = x^2+\left(-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x+o(x^2)\right)$$
$$= \frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{x+o(x)}$$

e quindi usando il limite notevole $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$

si ha:

$$f(x)\ln(1+\operatorname{sen} x) = f(x)\cdot x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$$

da cui:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\ln(1+\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}$$