ESERCIZIO 1

Trovare l'integrale indefinito di $f(x) = \cos^3 x \ln(1+\operatorname{sen}^2 x)$.
Usando la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ si ottiene

$$\int f(x)\,dx = \int (1-t^2)\ln(1+t^2)\,dt$$

Integriamo per parti con:

$g(t) = 1-t^2 \Rightarrow G(t) = t - \frac{t^3}{3}$

$h(t) = \ln(1+t^2) \Rightarrow h'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

da cui: $\int g(t)h(t)\,dt = G(t)h(t) - \int G(t)h'(t)\,dt$

D'altra parte: $\int G(t)h'(t)\,dt = 2\int\left(\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{3}\frac{t^4}{1+t^2}\right)dt$

e poiché:

$$\frac{3t^2-t^4}{1+t^2} \overset{\pm t^2}{=} -t^2 + \frac{4t^2}{1+t^2} = 4 - t^2 - \frac{4}{1+t^2}$$

si ha: $\int G(t)h'(t)\,dt = \frac{2}{3}\left[4t - \frac{t^3}{3} - 4\operatorname{atn} t\right] + \text{cost}.$

Quindi: ricordando che $t = t(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int f(x)\,dx = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln(1+t^2) - \frac{8}{3}t + \frac{2}{9}t^3 + \frac{8}{3}\operatorname{atn} t + \text{cost}.$$