$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

$$f(x) = \sqrt{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$$

- $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \sqrt{3}\}$, $f \in C^\infty(\mathrm{Dom}\, f)$.
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom} f$
- f è pari, ci limitiamo a studiarne le proprietà su $(\sqrt{3}, +\infty)$.
- Si ha: $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$.

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2-3}}\right) = 1$$

e $$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3}{x+\sqrt{x^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right) = 0$$

Quindi $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

- $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} - \frac{x}{(x^2-3)^{3/2}} = \frac{x}{(x^2-3)^{3/2}}\left(x^2-4\right)$$

da cui $f'(x) \geq 0$ su $(\sqrt{3}, +\infty) \iff x \geq 2$

Quindi su $(\sqrt{3}, +\infty)$: $f \nearrow$ $x \geq 2$, $f \searrow$ $\sqrt{3} < x \leq 2$

$x = \sqrt{2}$ minimo assoluto.

- $$f''(x) = \frac{1}{(x^2-3)^3}\left((3x^2-4)(x^2-3)^{3/2} - (x^3-4x)\frac{3}{\cancel{2}}(x^2-3)^{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2-3)^{5/2}}\left(\cancel{3x^4} - 13x^2 + 12 - \cancel{3x^4} + 12x^2\right)$$

$$= \frac{12-x^2}{(x^2-3)^{5/2}}$$