$$= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t\right) dt = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \cos t + c$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\right| + \cos t + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + \sqrt{1-x^2} + c$$

Da cui:

$$\int f(x)\,dx = -\sqrt{1-x^2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2} + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$= \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\ln x - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + \sqrt{1-x^2} + c$$

Si noti che la funzione $\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\ln x$ può essere estesa con continuità in $x=0$ essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}_{=\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}\ln x = 0$$

da cui supponendo di averlo fatto, si ha

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \ln 2 - 1 < 0$$

come ci si poteva aspettare essendo $f(x) < 0$ $\forall x \in (0,1)$.