③ Calcolare

$$I = \int_0^1 \underbrace{\frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}}}_{f(x)}\,dx$$

$\mathrm{Dom}\, f = (0,1)$, d'altra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \overset{\ln x = x-1+o(x-1)\ x\to 1}{=} 0$$

quindi f può essere estesa con continuità da sinistra in 0 e da destra in 1, i.e., se

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x\in(0,1) \\ 0 & x\in\{0,1\} \end{cases} \Rightarrow F \in C^0([0,1])$$

e si ha: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx.$

Quindi I è un integrale nel senso di Riemann.

Conviene determinare l'integrale indefinito di f usando l'integrazione per parti:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\ln x - \int\left(\left(\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\ln x + \int + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$$

inoltre:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx \overset{x=\operatorname{sen} t \iff t=\arcsin x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \cos t>0}{=} \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt$$