$\underline{\underline{I_2}}$: in questo caso

$$(1+\operatorname{atn}x)^{(x^x-1)} = e^{(x^x-1)\ln(1+\operatorname{atn}x)} \overset{\ln(1+\operatorname{atn}x)=\ln(1+\frac{\pi}{4})+o(1)\ x\to 1}{=}$$

$$1+(x^x-1)\ln(1+\operatorname{atn}x)+o(x^x-1) =$$

$$1+x\ln x\,\ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+o(x\ln x) \overset{x=1+o(1)\ x\to 1}{=}$$

$$1+(x-1)\ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+o(x-1)$$

da cui $\quad f(x) = \dfrac{x^{3/2}}{\ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+o(1)} \xrightarrow{x\to 1^-} 1\Big/\ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$

quindi f può essere estesa con continuità (da sinistra) in $x=1$, da cui I_2 convergente

$\underline{\underline{I_3}}$: come sopra si trova $f(x) \xrightarrow{x\to 1^+} 1\Big/\ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ quindi I_3 è convergente.

$\underline{\underline{I_4}}$: verifichiamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$, infatti

$$\operatorname{atn}x \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} \Rightarrow (1+\operatorname{atn}x)^{(x^x-1)}-1 \geq (1+1)^{(x^x-1)}-1$$

se x è sufficientemente grande. Allora per tali x:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x^{3/2}\ln x}{2^{(x^x-1)}-1} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

Quindi è verificata la condizione necessaria per la convergenza. D'altra parte, i ragionamenti fatti sopra fanno capire che il denominatore diverge in modo esponenziale, quindi anche I_4 è convergente.

Concludendo I è convergente.