⑤ Provare che
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3e^{\operatorname{sen}^2 x}-2\operatorname{ch}x-1}{x^2} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$
è derivabile in $x=0$ e determinare $f'(0)$.

Dimostriamo che f è continua in $x=0$ e che $f(x)=\alpha+\beta x+o(x)$ $x\to 0$, da ciò segue necessariamente che $\alpha=f(0)$, f derivabile in $x=0$ e $\beta=f'(0)$.

Dagli sviluppi elementari:

$$e^{\operatorname{sen}^2 x}=1+\operatorname{sen}^2 x+o(x^3)=1+x^2+o(x^3)$$
$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

segue:
$$f(x)=\frac{3+3x^2-2-x^2-1+o(x^2)}{x^2}=2+o(1)$$
da cui: $f(x)\xrightarrow{x\to 0}2=f(0)$.

Sviluppando ad ordini superiori:

$$e^{\operatorname{sen}^2 x}=1+\operatorname{sen}^2 x+\frac{\operatorname{sen}^4 x}{2}+o(x^4)=$$
$$=1+x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{2}+o(x^4)=1+x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$
$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

segue.
$$f(x)=2+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\qquad x\to 0$$
da cui $f'(0)=0$ (come ci si poteva aspettare essendo f pari).