(1) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a_n = \alpha^n \binom{3n}{n}^{1/n}$$

converge.

Sia $b_n = \binom{3n}{n}$, allora poiché:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n)!}{(\underbrace{3n+3-n-1}_{=2n+2})!}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}$$

$$= 3 \frac{(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{27}{4}$$

allora per il Criterio del Rapporto

$$\binom{3n}{n}^{1/n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{27}{4}$$

D'altra parte α^n è convergente se e solo se $\alpha \in (-1, 1]$, da cui (a_n) converge se e solo se $\alpha \in (-1, 1]$ e

$$a_n \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ \frac{27}{4} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Se $\alpha \leq -1$, (a_n) non ha limite dato che:

$$a_{2k} \xrightarrow{k\to+\infty} \begin{cases} +\infty & \alpha < -1 \\ \frac{27}{4} & \alpha = -1 \end{cases} \qquad a_{2k+1} \xrightarrow{k\to+\infty} \begin{cases} -\infty & \alpha < -1 \\ -\frac{27}{4} & \alpha = -1 \end{cases}$$