ESERCIZIO 5

Siano
$$F(y) = \int_0^y th(t^{2/3})\,dt$$
$$g(x) = x^3$$

allora $f(x) = F(g(x))$. Poiché $F \in C^1(\mathbb{R})$ per il Thm Fondamentale del Calcolo Integrale e $g \in C^1(\mathbb{R})$ si ha $f \in C^1(\mathbb{R})$ con
$$f'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = th(x^2)\cdot 3x^2$$

Quindi, $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 0$ da cui segue che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e di conseguenza risulta invertibile (con continuità).

Poiché $x=0$ è un flesso a tangente orizzontale per f il punto $y = f(0) = 0$ è un flesso a tangente verticale per f^{-1} e quindi la retta tangente al grafico di f^{-1} in $(0,0)$ è data dall'asse delle ordinate $x=0$.

Questo si può vedere anche dal Thm di Derivabilità della Funzione Inversa, infatti f^{-1} è derivabile in tutti i punti y tali che
$$f'(f^{-1}(y)) \neq 0$$

poiché $f'(x) \neq 0 \iff x \neq 0$ si ha $f^{-1}(y) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

Quindi se $y \neq 0$:
$$\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

quindi:
$$\lim_{y\to 0} \frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right) = +\infty$$