ESERCIZIO 3. Studiare

$$f(x) = \int_{-1}^{\ln x} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}\,dt$$

Poiché la funzione $\frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}} \xrightarrow{t\to 0} 0$, la funzione

$$I(y) = \int_{-1}^{y} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}\,dt$$

è $C^1(\mathbb{R})$ per il Thm Fondamentale del Calcolo Integrale.

Essendo $f(x) = I(\ln x)$ si ha $\operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$.

Si noti che se $x < e^{-1} \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}} < 0 \quad t \in (\ln x, -1)$, da cui $f(x) > 0$.

Inoltre, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}\,dt = +\infty$ usando il Criterio del Confronto Asintotico con $g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$.

Analogamente, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_{-1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}\,dt = +\infty$.

Lo studio di eventuali asintoti obliqui a $+\infty$ viene rimandato allo studio della derivata prima.

Si ha $f(e^{-1}) = 0$ e $f(e) = 0$, nell'ultimo caso infatti:

$$f(e) = \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}\,dt \quad \text{e } t \to \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}} \text{ è dispari.}$$

Per il Thm Fondamentale del Calcolo ed il Thm di Derivazione di funzione composta: $\forall x \in \operatorname{Dom} f$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\ln x)}{\sqrt{|\ln x|}} \cdot \dfrac{1}{x} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

d'altra parte: $\operatorname{sh}(\ln x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$