ESERCIZIO 5

Sia $A = \left\{ \frac{n}{n^2+(-1)^n n+1} : n \geq 1 \right\}$ e $a_n = \frac{n}{n^2+(-1)^n n+1}$

proviamo che $\inf A = 0$, $\sup A = \max A = a_1 = 1$.

Infatti, poiché $n^2+(-1)^n n+1 > 0$ se $n \geq 1$ si ha che 0 è un minorante di A.
Si noti che:

n pari: $n^2+(-1)^n n+1 = n^2+n+1 \geq n > 0$

(*)

n dispari: $n^2+(-1)^n n+1 = n^2-n+1 = (n-1)^2+n > 0$

Per dimostrare che 0 è il massimo dei minoranti basta notare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, e quindi dalla def. di limite:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad 0 < a_n < \varepsilon$

e a maggior ragione vale che 0 è il massimo dei minoranti. Ovviamente 0 non è minimo dato che $a_n = 0 \iff n = 0$.

Per dimostrare che $\max A = 1$, si osservi che da (*) segue $a_n \leq 1$, e poiché $a_1 = 1$ si ha la tesi.