$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$ Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{atn}(x^\alpha))}{\ln(\cos 1/x)}$$

Poiché:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = 0^-$$

$\cos\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \le 0$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{atn}(x^\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha<0 \\ \frac{\pi}{4} & \alpha=0 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha>0 \end{cases}$$

il limite si presenta come una forma indeterminata se $\alpha \neq 0$, mentre se $\alpha=0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{\operatorname{sen}(2\operatorname{atn}(x^0))}}}{\ln(\cos 1/x)} = -\infty .$$

Distinguiamo i due casi restanti.

$\boxed{\alpha<0.}$ Usiamo i limiti notevoli

$$\lim_{t\to0} \frac{\operatorname{atn} t}{t} = 1 , \quad \lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

per osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{atn} x^\alpha)}{2x^\alpha} = 1$$

e $\lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, $\lim_{t\to0} \frac{1-\cos t}{t^2/2} = 1$

per osservare che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\cos 1/x)}{-1/2x^2} = 1$$

Da cui segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{atn}(x^\alpha))}{\ln(\cos 1/x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(-4x^{\alpha+2}\right) = \begin{cases} -\infty & -2<\alpha<0 \\ -4 & \alpha=-2 \\ 0 & \alpha<-2 \end{cases}$$