$\boxed{\text{ESERCIZIO 4:}}$ Determinare gli $\alpha > 0$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \dfrac{\alpha^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{x} \ln\left(e^{-\frac{1}{x^{2\alpha}}} + e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

Se $x \neq 0$ la continuità segue dal fatto che f coincide in un intorno di x con una funzione continua.

Per la continuità in $x=0$ serve provare che:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

Si noti che, se esiste, $\lim_{x\to 0} f(x)$ verifica:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + \ln\alpha \cdot \lim_{x\to 0}\left[x^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{x^{2\alpha}}} + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

avendo usato i limiti notevoli:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \ , \quad \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^t - 1}{t} = \ln\alpha .$$

Per calcolare $\lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{x^{2\alpha}}} + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$, conviene osservare che si presenta come forma indeterminata $0\cdot\infty$ e che l'argomento del logaritmo è infinitesimo.
Per determinare quale dei due addendi ~~[illegible]~~ è quello che dà il carattere della somma si studia

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^{2\alpha}}}}{e^{-\frac{1}{x^2}}} .$$