$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$ Dim. per induzione

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

b) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$

Sapendo che $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ se $1 \le k \le n$.

a) Il passo $n=0$ è ovvio e si riduce a

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

Supponiamo vero il passo n e dimostriamo che allora segue il passo $(n+1)$, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

Usando il suggerimento si ha:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \cancel{\binom{n+1}{0}}^{1} + \cancel{\binom{n+1}{n+1}}^{1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} =$$

$$= \binom{0}{0} + \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$