

CORSO di LAUREA in FISICA ANALISI MATEMATICA 1

Prova Scritta Parziale

9 Novembre 2004

1. Mediante la definizione di limite verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^4 + 3n^2 + 2} \sin \left(\frac{n^2}{n^2 + (-1)^n} \right) = 0.$$

2. Usando il Principio di Induzione provare che

(a)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

(b)

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(Sugg.to: ricordarsi che $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ per $1 \leq k \leq n$.)

3. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2 \arctan(x^\alpha))}{\ln(\cos(1/x))}.$$

4. Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\alpha \sin^3 x - 1}{x} \ln(e^{-1/x^{2\alpha}} + e^{-1/x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbf{R}$.

5. Determinare estremi inferiore e superiore ed eventuali minimo e massimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{n^2 + (-1)^n n + 1} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$