ESERCIZIO 1: Essendo f di classe C^3 in un intorno di $x=0$ si ha:

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{a_0} + \underbrace{f'(0)}_{a_1}x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2}}_{a_2}x^2 + \underbrace{\frac{f'''(0)}{6}}_{a_3}x^3 + o(x^3)$$

Poiché:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sh(f(x)) - 4\,sh\,x + e^x - \cos x}{x^3} = 4 \qquad (*)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \left(sh(f(x)) - 4\,sh\,x + e^x - \cos x \right) = 0$$

da cui:

$$sh(f(0)) = 0 \iff f(0) = a_0 = 0.$$

Usando gli sviluppi di Taylor nell'origine delle funzioni $t \to sh\,t$, $t \to e^t$, $t \to \cos t$ si ottiene

$$sh(f(x)) - 4\,sh\,x + e^x - \cos x =$$

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) + \overbrace{\frac{1}{6}\left(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)\right)^3}^{=\frac{1}{6}(a_1^3x^3 + o(x^3))} +$$

$$-4\left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2}$$

$$= (a_1 - 3)x + (a_2 + 1)x^2 + \left(a_3 + \frac{a_1^3}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)$$

Quindi:

$$(*) \iff \begin{cases} a_1 - 3 = 0 \\ a_2 + 1 = 0 \\ a_3 + \frac{a_1^3}{6} - \frac{1}{2} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$f(x) = 3x - x^2 + o(x^3)$$