ESERCIZIO 2: Sia $f(x) = \ln^4|x| - 6\ln^2|x| + 8|\ln|x||$, allora:

$$\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

e f risulta pari.
Restringeremo quindi lo studio della funzione all'insieme $(0,+\infty)$ su cui f risulta continua.

Poiché:

$$f(x) = |\ln|x||\left(|\ln^3|x|| - 6|\ln|x|| + 8\right)$$

si ha:

$$f(x) > 0 \iff |\ln|x||^3 - 6|\ln|x|| + 8 > 0$$

e ponendo $t = |\ln|x||$, basta studiare il segno di $g(t) = t^3 - 6t + 8$ per $t \geq 0$.
Poiché $g'(t) = 3t^2 - 6$, si vede facilmente che $t = \pm\sqrt{2}$ sono gli estremi relativi di g, e quindi

$$g(t) \geq g(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} = 4(2-\sqrt{2}) > 0$$

$\forall t \geq 0$.
Quindi $g(t) > 0$ $\forall t \geq 0$, da cui:

$$f(x) \geq 0 \ \forall x > 0 \quad e \quad f(x) = 0 \iff x = 1$$

quindi $x = 1$ è punto di minimo assoluto.
Si trova facilmente che:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

f non ha asintoti obliqui a $+\infty$.

Se $x \neq 1$ f risulta di classe C^1 e quindi per $x \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ si ha: