ESERCIZIO 4: Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin^4(\pi x)\sin^4\left(\frac{\pi}{x}\right)}{e^{\ln^\alpha x}-1}$, $x\in\mathbb{R}$, allora

$$\mathrm{Dom} f_\alpha \cap [1,+\infty) = (1,+\infty)$$

Se $\alpha\le 0$ $\lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = 0$, dato che in tal caso $\ln^\alpha x \to +\infty$ per $x\to 1^+$ e $\alpha<0$, il caso $\alpha=0$ è ovvio.
Per tali valori per concludere l'esercizio basta studiare il comportamento di f_α all'infinito.
In tal caso, ricordando che $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ si ha per $\alpha<0$:

$$f_\alpha(x) = \sin^4(\pi x)\,\frac{\ln^\alpha x}{x^4}\,\underbrace{x^4\sin^4\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\to\pi^4}\,\underbrace{\frac{\ln^\alpha x}{e^{\ln^\alpha x}-1}}_{\to 1}$$

e quindi l'integrale di f_α ha lo stesso carattere di quello di

$$g_\alpha(x) = \sin^4(\pi x)\,\frac{\ln^\alpha x}{x^4}$$

che è convergente per confronto asintotico con $1/x^4$.
Se $\alpha=0$ più semplicemente:

$$f_0(x) = \sin^4(\pi x)\sin^4\left(\frac{\pi}{x}\right)\frac{1}{e-1}$$

e l'integrale converge per confronto asintotico con $1/x^3$.

Se $\alpha>0$ ricordando che $\sin(\pi t) = -\sin(\pi(t-1))$ si ha se $x\to 1^+$:

$$f_\alpha(x) = \underbrace{\frac{\sin^4(\pi x)}{(x-1)^4}}_{\to\pi^4}\cdot\underbrace{\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^4}}_{\to\pi^4}\cdot\frac{(x-1)^4\left(\frac{1}{x}-1\right)^4}{(x-1)^\alpha}\,\underbrace{\frac{(x-1)^\alpha}{\ln^\alpha x}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{\ln^\alpha x}{e^{\ln^\alpha x}-1}}_{\to 1}$$

da cui