$$\lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 1^+} \pi^8 (x-1)^{8-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 8 \\ \pi^8 & \alpha = 8 \\ +\infty & \alpha > 8 \end{cases}$$

Quindi, per $\alpha \in [0,8]$, f_α è estendibile con continuità (da destra) in $x=1$, per concludere basta studiare il comportamento di f_α all'infinito.

Per tali valori di α si ha che l'integrale converge poiché:

$$f_\alpha(x) = \mathrm{sen}^4(\pi x) \cdot \overbrace{x^4\, \mathrm{sen}^4\left(\frac{\pi}{x}\right)}^{\to \pi^4} \cdot \frac{1}{x^4\left(e^{\ln^\alpha x} - 1\right)} \qquad (*)$$

e si conclude per confronto con $1/x^4$.

Se $\alpha > 8$ si distinguono due casi:

$8 - \alpha \leq -1 \iff \alpha \geq 9$ per cui l'integrale diverge essendo divergente

$$\int_1^2 f_\alpha(x)\,dx$$

come si vede confrontando f_α con $(x-1)^{-\alpha+8}$

$8 - \alpha > -1 \iff 8 < \alpha < 9$, allora l'integrale è convergente dato che:

$$\int_1^2 f_\alpha(x)\,dx \in \mathbb{R}^+, \text{ per confronto con } (x-1)^{-\alpha+8}$$

$$\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx \in \mathbb{R}^+, \text{ ragionando come in } (*)$$