② Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{atn}\left(1 + |\ln^3|x||\right)$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \in C^0(\operatorname{Dom} f)$.

- f è pari, quindi d'ora in poi restringerò lo studio all'insieme $[0, +\infty)$.

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f$ ha as. or. le a $+\infty$

Poiché $f(x) \in [\overset{\pi/4}{\cancel{\operatorname{atn} 1}}, \frac{\pi}{2}) \ \forall x \in \operatorname{Dom} f$, si ha che $\sup f = \frac{\pi}{2}$, $x = \pm 1$ minimi assoluti con $\inf f = \frac{\pi}{4}$.

- Se $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$: f è der.le e f' è C^0 in x

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x \cdot \operatorname{sgn}(\ln x)}{(1 + |\ln^3 x|)^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3 \ln x \, |\ln x|}{x\left[1 + (1 + |\ln^3 x|)^2\right]}$$

da cui:

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = 0$$

e quindi f è der.le con continuità in $x = 1$.

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

- $f'(x) > 0 \iff \ln x > 0 \iff x > 1$

$f \searrow\searrow$ $x \in (0, 1)$, $f \nearrow\nearrow$ $x > 1$, $x = 1$ min ass.