① Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)}$$

Prima di integrare f conviene razionalizzarla per riscriverla in forma più comoda:

$$f(x)=x^3\,\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right)}{x^2+4x+5-(x+2)^2}$$

$$=x^3\,\frac{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}{1}=x^3\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right)$$

Allora:

$$\int f(x)\,dx=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\int x^3\sqrt{x^2+4x+5}\,dx$$

Poiché $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, con la sostituzione $x+2=\operatorname{sh}t$, si ha

$$\int x^3\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=\int(\operatorname{sh}t-2)^3\operatorname{ch}^2t\,dt=$$

$$=\int\left(\operatorname{sh}^3t\operatorname{ch}^2t-6\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t+12\operatorname{sh}t\operatorname{ch}^2t-8\operatorname{ch}^2t\right)dt$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

Si ha: $I_1=\int(-1+c^2)c^2\,dc=\frac{\operatorname{ch}^5t}{5}-\frac{\operatorname{ch}^3t}{3}+k$

avendo usato la sostituzione $c=\operatorname{ch}t$.