(3) Determinare l'ordine d'infinitesimo di

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi x)) - 2\operatorname{sen}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

per $x \to 1$ e calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x^x-1)^2}$

Poiché $f_1(1)=0$, $f_2(1)=0$, avendo posto $f_1(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi x))$, $f_2(x) = 2\operatorname{sen}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ basta determinare gli sviluppi di f_1 e f_2 in un intorno di $x=1$. Per fare questo si sviluppano le funzioni $\operatorname{sen}(\pi x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ in $x=1$ e, più semplicemente, ricordando che

$$\operatorname{sen}(\pi x) = -\operatorname{sen}(\pi(x-1))$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$$

si può usare lo sviluppo di $\operatorname{sen} t$ in $t=0$:

$$\operatorname{sen}(\pi x) = -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^4)$$

$$f_1(x) = -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^4) + \\ -\frac{1}{6}\left(-\pi(x-1) + o((x-1)^2)\right)^3 = \\ = -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^4)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^3}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^4)$$

$$f_2(x) = -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^3}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^4) \\ -\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{2}(x-1) + o((x-1)^2)\right)^3$$