⑤ Provare che $f(x) = e^{\operatorname{tg} x} - \ln(1+x) - \operatorname{ch} x + 3$ ha un minimo relativo in $x=0$.

Si deve provare che $\exists \delta > 0 : \forall x \in (-\delta, \delta)$

$$f(x) \geq f(0) = 3$$

Proviamo a determinare lo sviluppo di Taylor di f in $x=0$:

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = 1 + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - x + \frac{x^2}{2} - 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) + 3$$

$$= 3 + x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

Poiché $\exists \delta > 0 : \quad \frac{1}{2} + o(1) > \frac{1}{4}$ se $|x| < \delta$

si ha:

$$f(x) \geq 3 + \frac{x^2}{4} \geq 3 \quad \text{se } |x| < \delta$$