CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1
Prova Scritta
27 Marzo 2003

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x + \tan x - x}{x^6} \cos\left(\frac{\pi}{2-x}\right).$$

2. Provare che esiste

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x^x |1+\ln x| \sqrt{1-x^x}dx,$$

calcolarne il valore.

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^3 + \sin x$$

è invertibile in un intorno dell'origine, quindi calcolare

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(\tan y)}{\exp(f^{-1}(y)) - 1}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+x^2} + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

5. Sia $u : (a,b) \to \mathbf{R}$, e sia $U : (a,b)\times(a,b) \to \mathbf{R}$ definita da

$$U(x,y) = \begin{cases} \dfrac{u(x)-u(y)}{x-y} & x \neq y \\ u'(x) & x = y. \end{cases}$$

(a) Provare che se $u \in C^1((a,b))$ allora $U \in C^0((a,b)\times(a,b))$;
(Sugg.to: per i punti della diagonale usare il Teorema della Media Integrale.)

(b) Provare che se u è derivabile due volte su (a,b) allora U è parzialmente derivabile e vale

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,x) = \frac{u''(x)}{2}.$$

(c) Provare che se $u \in C^2((a,b))$ allora $U \in C^1((a,b)\times(a,b))$. (Facoltativo)