

CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1

Prova Scritta

22 Settembre 2003

1. Determinare i coefficienti dell'unico polinomio di grado 3, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, tale che valga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{p(x)} - 2 - \sinh x + \cosh x}{p^3(x) + x^3} = -1.$$

2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^3 \ln x}{x^2(e^{x-1} - 1)} dx.$$

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \arctan x - \sqrt[3]{x}$$

è invertibile in un intorno di $x = 0$ con inversa g di classe C^2 .

(Sugg.to: verificare che la derivata prima e seconda di g possono essere estese con continuità nell'origine.)

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{|x|}} + \sqrt{|x|}(1 - x),$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

5. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin x}{|y|x^2 + y^3} & y \neq -|x| \\ 0 & y = -|x|. \end{cases}$$

Provare che f non è continua nell'origine ma che

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} f(x, y) = 0,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > \sqrt{|x|}\}$.