$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \ln(1+\sqrt{10}) - \frac{1}{3}\ln(\sqrt{10}-3)$$

Dopo il cambio di variabile $t=\sqrt{x}$ è un integrale standard! Forse lo trovano direttamente svolto su un libro!

1) $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\sin\frac{1}{x} - \sinh\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$$

$\frac{\pi x}{2x+1} \to \frac{\pi}{2}$, $\tan \to +\infty$

$$\frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi x}{2x+1} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2x+1} > \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)}\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)^{-1}$$

$$\sin\frac{1}{x} - \sinh\frac{1}{x} = \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{6x^3} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

da cui il limite in questione è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\frac{2x+1}{\pi} = 0$$