② $$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+9}\right)}{2x\sqrt{x}}}_{f(x)}\,dx$$

La convergenza dell'integrale può essere verificata o col Cr. del Cfr Asintotico: $\forall \varepsilon>0$

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

o direttamente calcolandone il valore:

$$\int_1^M f(x)\,dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_1^{\sqrt{M}} \frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)}{t^2}\,dt =$$

$g'(t)=1/t^2 \quad h(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)$

$$= \left[-\frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)}{t}\right]_1^{\sqrt{M}} + \int_1^{\sqrt{M}} \frac{1}{t}\underbrace{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+9}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}}$$

$t = 3\sinh s$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{t^2+9}}\,dt = \int \frac{1}{3\sinh s}\,\frac{\cancel{3}\cancel{\cosh s}}{\cancel{3}\cancel{\cosh s}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\underbrace{\tanh\frac{s}{2}}_{=\frac{\cosh s-1}{\sinh s}}\right| = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9+t^2}-3}{t}\right)$$

è scritto su tutti i libri!

$$\Rightarrow \int_1^M f(x)\,dx = \ln\left(1+\sqrt{10}\right) - \underbrace{\frac{\ln\left(\sqrt{M}+\sqrt{M+9}\right)}{\sqrt{M}}}_{\to 0} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{9+M}-3}{\sqrt{M}}\right)}_{\to 0} - \ln\left(\sqrt{10}-3\right)\right]$$