

**CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1**

Prova Scritta

10 Luglio 2003

1. Determinare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} - \sinh \frac{1}{x} \right) \tan \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right).$$

2. Provare che il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+9})}{2x\sqrt{x}} dx.$$

Calcolarne il valore.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = 16(x - \sin x) + \ln \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)^2,$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

4. Provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} \int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t^2} \ln t dt = \frac{3}{2}.$$

5. Provare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|xy|} \left(\arctan^2 \left(\frac{1}{xy} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right) & \text{se } xy \neq 0 \\ -\pi & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

è continua su tutto \mathbf{R}^2 ed è differenziabile in $(0, 0)$.