

**CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1**

2^a Prova Parziale

5 Dicembre 2002

1. Provare che la funzione

$$f(x) = \int_1^x \arctan^6(t-1) dt$$

è invertibile con continuità in un intorno del punto $x = 1$. Inoltre, detta g l'inversa, calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{y \rightarrow 0} g'(y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^6 g'(y).$$

2. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^x - \cos(x\sqrt{|x|}) & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è non negativa in un intorno dell'origine.

3. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\tan x}{x|x^x - 1|}} dx.$$

4. Al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ discutere la continuità, la derivabilità lungo le direzioni e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ |xy|^\alpha \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \end{cases}$$

nell'origine.