

**CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1**

Prova Scritta

25 Settembre 2001

SOLUZIONI

1. Calcolare il seguente integrale

$$\int x e^{(e^{2x^2} + 2x^2)} dx.$$

Soluzioni: Si noti che

$$\frac{d}{dx} \left(e^{e^{2x^2}} \right) = 4x e^{e^{2x^2}} e^{2x^2}.$$

da cui tutte le primitive della funzione integranda sono date da

$$\frac{1}{4} e^{e^{2x^2}} + c.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} \left(e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} - 1 \right) dt$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzioni: Il dominio della funzione è tutto $\mathbf{R}$ ed essendo essa pari si riduce il suo studio al caso $x \geq 0$.

Si noti che $f'(x) = 2x \left(e^{-\frac{1}{|x|}} - 1 \right)$ se $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, quindi $f(x) \leq 0$ se $x > 0$ e $x = 0$ è massimo assoluto con $f(0) = 0$.

Dallo sviluppo di Taylor di e^x in un intorno di $x = 0$ si deduce per confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{t}}$ che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

D'altra parte, si ha per il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -2.$$

Poichè per $x \geq 0$ si ha

$$2x = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt,$$

segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x^2} \left(e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt.$$

L'ultimo integrale è divergente, ciò si prova usando lo sviluppo di Taylor di e^x in un intorno di $x = 0$ e il Criterio del Confronto Asintotico applicato alla funzione integranda e a $\frac{1}{t}$.

Si è visto che se $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = 2x \left(e^{-\frac{1}{|x|}} - 1 \right),$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0,$$

quindi f è di classe $C^1(\mathbf{R})$ e $f'(0) = 0$. Inoltre, f ha come solo punto critico $x = 0$ che abbiamo già osservato essere massimo assoluto.

Se $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f''(x) = 2 \left(e^{-\frac{1}{|x|}} - 1 + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} \right) = 2e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\frac{1}{|x|} + 1 - e^{\frac{1}{|x|}} \right),$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0,$$

quindi f è di classe $C^2(\mathbf{R})$ e $f''(0) = 0$.

Infine, ricordando che $e^t - 1 - t > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, si ha $f''(x) < 0$ per ogni $x > 0$, quindi f è concava per ogni $x \in \mathbf{R}$.

3. Provare che la successione

$$a_n := \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n - e$$

è negativa per ogni $n \in \mathbf{N}$. Inoltre, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Soluzioni: Si ricordi che per ogni successione $b_n \in \mathbf{R}$ infinitesima, la successione $(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}}$ converge ad e in modo strettamente crescente. Allora, poichè $n \sin \frac{1}{n} \leq 1$, si ha

$$a_n = \left(\left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}} \right)^{n \sin \frac{1}{n}} - e \leq \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}} - e < 0.$$

Inoltre, passando a notazione esponenziale e usando lo sviluppo di Taylor delle funzioni $\ln(1+x)$, $\sin x$ in un intorno di $x=0$, si ha

$$a_n = e \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

e quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

4. Trovare gli $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^\alpha$$

in un intorno di $x_0 = 0$ escluso il punto stesso.

Soluzioni: Si noti che per $\alpha \leq 0$ la disuguaglianza è banale essendo $\frac{\sin x}{x} < 1$ per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Per $\alpha > 0$ si procede usando la formula di Taylor

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin x}{x} \right)^\alpha - \cos x \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^\alpha - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} \right) x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi, se $\alpha < 3$ la disuguaglianza è verificata, mentre se $\alpha > 3$ la disuguaglianza non vale, anzi, vale quella opposta.

Per studiare il caso $\alpha = 3$ si deve fare uno sviluppo di ordine superiore

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^3 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24} \right) x^4 + o(x^4) = \frac{1}{15} x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

e quindi anche per $\alpha = 3$ la disuguaglianza è verificata in un intorno di $x_0 = 0$.