CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1
Prova Scritta
16 Febbraio 2001
Soluzioni

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)\arccos(1-x)}{\sqrt{x}\sin x}.$$

Soluzione: Si ricordi che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{e}{2},$$

quindi, usando anche il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, il calcolo del limite in questione si riduce a quello del limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

Le funzioni al numeratore e al denominatore verificano tutte le ipotesi del Teorema di de L'Hòpital forma $\frac{0}{0}$, quindi si può provare a calcolare il limite del rapporto delle loro derivate
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2},$$

e quindi il limite in questione vale $-\frac{e}{\sqrt{2}}$.

2. Discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n\geq 1} n^2 \ln^\alpha n \int_{\sin\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\arctan x}{x} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione: La serie è a termini positivi, inoltre dal Teorema della Media Integrale si ha che esiste $x_n \in \left(\sin\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ tale che
$$\begin{aligned}
a_n &= n^2 \ln^\alpha n \frac{\arctan x_n}{x_n}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right) \\
&= n^2 \ln^\alpha n \frac{\arctan x_n}{x_n}\left(\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\
&= \ln^\alpha n \frac{\arctan x_n}{x_n}\left(\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Sia $b_n = \frac{\ln^\alpha n}{n}$, poichè $x_n \to 0$ segue

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\arctan x_n}{x_n} \left(\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right) \to \frac{1}{6}$$

e quindi la serie degli a_n ha lo stesso carattere di quella dei b_n, che converge se e solo se $\alpha < -1$.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_1^{\ln|x|} \arctan \frac{1}{\sqrt{|t|}} dt$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Lo studio della derivata seconda è facoltativo)

Soluzione: Sia

$$F(y) = \int_1^{y} \arctan \frac{1}{\sqrt{|t|}} dt,$$

allora $(0, +\infty) \subseteq DomF$. D'altra parte, ricordando che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} sgn(x)$ si deduce che $DomF = \mathbf{R}$ e che

$$F(0) = \int_0^1 \arctan \sqrt{t}\, dt.$$

Poichè $f(x) = F(\ln|x|)$, si ha

$$Domf = \{x \in Dom(\ln) : \ln|x| \in DomF\} = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Si noti che f è pari, quindi ci si può limitare a studiare la funzione per $x > 0$. Il calcolo del limite di f in $x = 0$ si ottiene con la sostituzione $y = \ln x$, infatti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to -\infty} F(y),$$

ed il limite a destra esiste essendo la funzione integranda positiva.

Infine, $\lim_{y \to -\infty} F(y) = -\infty$ per confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$. Ragionando analogamente si prova

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} F(y) = +\infty.$$

Poichè la funzione integranda è strettamente positiva f è strettamente crescente e si annulla se e solo se $x = e$.

Poichè $f(x) = F(\ln|x|)$, applicando il Teorema di Derivazione delle Funzioni Composte segue che f è derivabile nei punti $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}$$

ed f è di classe $C^1((0,1)\cup(1,+\infty))$. Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{\pi}{2}$$

si ha che f è derivabile con continuità anche in $x=1$ e $f'(1)=\frac{\pi}{2}$. Dato che

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$$

f non ha asintoti nè obliqui nè orizzontali a $+\infty$, e non presenta punti estremali.

Per studiare la concavità della funzione si calcola la derivata seconda, sia $x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ allora

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+\frac{1}{|\ln x|}}\cdot\frac{sgn(\ln x)}{x}\left(-\frac{1}{2}|\ln x|^{-\frac{3}{2}}\right)-\arctan\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln x}{2(1+|\ln x|)}|\ln x|^{-\frac{3}{2}}+\arctan\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{sgn(\ln x)}{2\sqrt{|\ln x|}(1+|\ln x|)}+\arctan\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\right). \end{aligned}$$

Quindi, per $x>1$ segue $f''(x)<0$ e la stretta concavità di f in $(1,+\infty)$, inoltre si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f''(x) = -\infty.$$

Per $0<x<1$ si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f''(x) = +\infty,$$

e ponendo $t=-\ln x$ si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f''(x) &= \lim_{t\to+\infty} e^{2t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}-\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2(1+t)}-\sqrt{t}\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\infty, \end{aligned}$$

da cui si deduce l'esistenza di almeno un punto di flesso $z\in(0,1)$. Proviamo che $z\in(0,1)$ in realtà è l'unico punto di flesso. A tal proposito studiamo la funzione $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definita da

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}(1+y)}-\arctan\frac{1}{\sqrt{y}},$$

dato che per $x \in (0,1)$ si ha $f''(x) = \frac{1}{x^2}\varphi(-\ln x)$ e quindi il segno di f'' è determinato da quello di φ. Si noti che

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(y) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi(y) = 0,$$

inoltre

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= -\frac{\sqrt{y}+\frac{1+y}{2\sqrt{y}}}{2y(1+y)^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{y}}\left(-\frac{1}{2y\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}(1+y)}\left(-\frac{3y+1}{2y(1+y)}+1\right) \\ &= \frac{2y^2-y-1}{2y\sqrt{y}(1+y)^2}.\end{aligned}$$

Quindi $\varphi'(y) \geq 0$ se e solo se $y \geq 1$, da cui $y = 1$ è punto di minimo assoluto per φ su $(0,+\infty)$ e $\varphi(1) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} < 0$. Si noti che essendo $\lim_{x\to+\infty} \varphi(y) = 0$ ed essendo φ strettamente crescente per $y > 1$ e $\varphi(1) < 0$, si ha $\varphi(y) < 0$ per $y > 1$. Infine, poichè $\lim_{x\to 0^+} \varphi(y) = +\infty$ e la funzione è continua esiste un punto $\xi \in (0,1)$ tale che $\varphi(\xi) = 0$, tale punto è l'unico in cui φ si annulla per la discussione appena fatta. Quindi $z = e^{-\xi} \in (e^{-1},1)$ è l'unico punto di flesso per f.

4. Sia $\alpha > 0$ e sia $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha + x^2}.$$

Determinare, al variare di α, i punti di massimo assoluto x_α e quelli di minimo assoluto y_α di f_α, e i limiti per $\alpha \to 0^+$ di x_α, y_α, $f_\alpha(x_\alpha)$, $f_\alpha(y_\alpha)$.

Soluzione: Si noti che f_α è dispari per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, quindi se esiste un punto di massimo assoluto x_α il punto $-x_\alpha$ è di minimo assoluto.

Calcoliamo i punti estremali di f_α :

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha - x^2}{(\alpha + x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\alpha}.$$

Dallo studio dei segni di f'_α si deduce che $x_\alpha = \sqrt{\alpha}$ è punto di massimo assoluto e $y_\alpha = -x_\alpha = -\sqrt{\alpha}$ è punto di minimo assoluto. Inoltre, si ha

$$f_\alpha(x_\alpha) = -f_\alpha(y_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

da cui

$$\lim_{\alpha\to 0^+} x_\alpha = \lim_{\alpha\to 0^+} y_\alpha = 0$$
$$\lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(x_\alpha) = -\lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(y_\alpha) = +\infty.$$

5. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\arccos\frac{1}{x} - \arctan x\right) dx.$$

Soluzione: Studiamo lo sviluppo asintotico della funzione integranda f in un intorno di $+\infty$. A tale proposito si ricordi lo sviluppo di Taylor in un intorno dell'origine della funzione $t \to \arccos t$:

$$\arccos t = \frac{\pi}{2} - t + o\left(t^2\right),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\arccos\frac{1}{x} - \arctan x &= \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Inoltre, si ha

$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

da cui segue

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) o\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La convergenza assoluta, e quindi quella semplice, dell'integrale improprio si deduce per confronto asintotico di $|f(x)|$ con la funzione $g(x) = \frac{1}{x^2}$.