

**CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1**

Prova Scritta

11 Settembre 2001

SOLUZIONI

1. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_1^e \cos(2 + \ln(x^3)) dx.$$

Soluzione: Calcoliamo una primitiva della funzione integranda usando ripetutamente il metodo di integrazione per parti. Si ha

$$\begin{aligned} \int \cos(2 + \ln(x^3)) dx \\ &= x \cos(2 + \ln(x^3)) + 3 \int \sin(2 + \ln(x^3)) dx \\ &= x \cos(2 + \ln(x^3)) + 3 \left(x \sin(2 + \ln(x^3)) - 3 \int \cos(2 + \ln(x^3)) dx \right) + c. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$\int \cos(2 + \ln(x^3)) dx = \frac{x}{10} (\cos(2 + \ln(x^3)) + 3 \sin(2 + \ln(x^3))) + c.$$

Da cui il valore dell'integrale cercato è

$$\frac{e}{10} (\cos 5 + 3 \sin 5) - \frac{1}{10} (\cos 2 + 3 \sin 2).$$

2. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \arctan \sqrt{|1 + \ln(t)|} dt$$

con particolare attenzione agli asintoti. Tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione: La funzione integranda f è definita e continua per $t > 0$, si può estenderla con continuità in $t = 0$ ponendo $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Perciò $Dom F = [0, +\infty)$, ed essendo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{\pi}{2}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

La funzione F potrebbe avere un asintoto obliquo. Usando i Teoremi di De l'Hopital è facile provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} F(x) - \frac{\pi}{2}x &= \int_0^x \left(\arctan \sqrt{|1 + \ln(t)|} - \frac{\pi}{2} \right) dt \\ &= - \int_0^x \arctan \frac{1}{\sqrt{|1 + \ln(t)|}} dt, \end{aligned}$$

e quindi poichè $\arctan \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + o(\frac{1}{s})$ per $s \rightarrow +\infty$ si ha per Confronto Asintotico con $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(x) - \frac{\pi}{2}x \right) = -\infty.$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo la derivata prima è

$$F'(x) = f(x),$$

con

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi, F risulta essere di classe $C^1((0, +\infty))$, strettamente crescente in $(0, \infty) \setminus \{e^{-1}\}$ e con minimo assoluto in $x = 0$ con valore $F(0) = 0$. Il punto $x = e^{-1}$ è un punto critico la cui natura va accertata.

Per $x \in (0, \infty) \setminus \{e^{-1}\}$ la derivata seconda è data da

$$F''(x) = \frac{\operatorname{sgn}(1 + \ln(x))}{2x\sqrt{|1 + \ln(x)|} (1 + |1 + \ln(x)|)},$$

quindi F risulta essere di classe $C^2((0, +\infty) \setminus \{e^{-1}\})$. Inoltre, si ha

$$F''(x) < 0 \text{ se } 0 < x < e^{-1}, \quad F''(x) > 0 \text{ se } x > e^{-1},$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} F''(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} F''(x) = +\infty.$$

Quindi, si ha

$$F \text{ concava se } 0 < x < e^{-1}, \quad F \text{ convessa se } x > e^{-1},$$

ed il punto $x = e^{-1}$ è un flesso a tangente orizzontale.

3. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos \left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) - 1 \right].$$

Soluzione: Passando alla scrittura esponenziale si deduce che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

da cui segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) - 1}{\left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)^2} = -\frac{1}{2},$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) - 1}{\frac{1}{n} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)} = -\frac{1}{2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie in questione converge se e solo se lo fa la serie con termine n -mo dato da

$$b_n = \frac{1}{n} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Distinguiamo vari casi:

- (1) $\alpha > 0$: poichè in tal caso l'argomento del logaritmo è infinitesimo, si ha che la serie dei b_n si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $2\alpha + 1$, e quindi è convergente;
- (2) $\alpha = 0$: la serie diverge essendo $b_n = \frac{\ln^2 2}{n}$;
- (3) $\alpha < 0$: la serie diverge essendo confrontabile con $\frac{\ln^2 n}{n}$.

4. Sia $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione crescente e continua tale che $f(-1) = -2$, $f(2) = 1$. Siano $g, h : (-1, 2) \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$g(x) = 2 + \int_0^{x^3} f(t) dt, \quad h(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt.$$

Calcolare con la massima precisione possibile $h\left(\frac{1}{100}\right)$.

Soluzione: La funzione h risulta essere di classe $C^2((-1, 2))$, si può quindi sviluppare la funzione al secondo ordine usando la formula di Taylor col resto di Lagrange in un intorno dello zero:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + h''(\xi_x)\frac{x^2}{2}.$$

con $\xi_x = \lambda_x x$, $\lambda_x \in (0, 1)$. Dalle definizioni di g, h segue

$$h'(x) = g(x), \quad h''(x) = 3x^2 f(x^3),$$

da cui essendo f monotona si ha per $x \in (-1, 1)$

$$|h''(\xi_x)| = 3|\xi_x^2| |f(\xi_x^3)| \leq 3 * 10^{-4} |f(-1)| = 6 * 10^{-4}.$$

Infine, poichè $h(0) = 1$ e $h'(0) = 2$, si ha

$$\left| h\left(\frac{1}{100}\right) - \frac{51}{50} \right| \leq 3 * 10^{-8}.$$