

**CORSO di LAUREA in FISICA**  
**ANALISI MATEMATICA 1**

**Prova Scritta**

10 Luglio 2001

**SOLUZIONI**

1. Provare la convergenza e calcolare il valore del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} \ln(1+x^{\frac{3}{2}}) dx.$$

**Soluzione:** Poichè

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

lo studio della convergenza dell'integrale si riduce allo studio dell'integrabilità della funzione integranda in un intorno di  $+\infty$ . D'altra parte, confrontando quest'ultima con  $x^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , il Criterio del Confronto Asintotico permette di dedurre la convergenza.

Per determinare il valore dell'integrale improprio cerchiamo una primitiva della funzione integranda. Dal cambio di variabile  $t = x^{\frac{1}{2}}$  e per integrazione per parti segue

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{3}{2}} \ln(1+x^{\frac{3}{2}}) dx &= 2 \int t^{-2} \ln(1+t^3) dt \\ &= 2 \left( -t^{-1} \ln(1+t^3) + \int \frac{3t}{1+t^3} dt \right). \end{aligned}$$

Usando il metodo dei fratti semplici si trova la decomposizione

$$\frac{3t}{1+t^3} = -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1},$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \int \frac{3t}{1+t^3} dt &= -\ln(t+1) + \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\ &= -\ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}\right) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Dai vari integrali trovati facendo le sostituzioni inverse si ottiene

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{3}{2}} \ln(1+x^{\frac{3}{2}}) dx &= -2x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+x^{\frac{3}{2}}) \\ &+ 2 \ln\left(\frac{\sqrt{x-x^{\frac{1}{2}}+1}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\right) + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)\right) + c. \end{aligned}$$

Allora, la funzione

$$F(z) = \int_1^z x^{-\frac{3}{2}} \ln(1 + x^{\frac{3}{2}}) dx$$

è una primitiva di  $x^{-\frac{3}{2}} \ln(1 + x^{\frac{3}{2}})$  in  $(0, +\infty)$ . Da cui si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} \ln(1 + x^{\frac{3}{2}}) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (F(1) - F(\varepsilon)) + \lim_{R \rightarrow +\infty} (F(R) - F(1)) \\ &= -\sqrt{3} \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi. \end{aligned}$$

## 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{\ln^2|x|}{2}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

**Soluzione:** È facile verificare che  $\text{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , e che  $f$  è continua sul suo dominio. Inoltre, la funzione è dispari, quindi si restringe il suo studio agli  $x > 0$ .

Si noti che  $f(x) = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x\right)$ , da questa segue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Quindi  $f$  può essere estesa con continuità in  $x = 0$  ponendo  $f(0) = 0$ . Inoltre, dai due limiti sopra si deduce che  $f$  ha un massimo assoluto per  $x > 0$ .

La funzione è derivabile sul suo dominio con derivata continua essendo composizione di funzioni di classe  $C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ . Ragionando in modo analogo si vede che  $f \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ .

La derivata prima è data da

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x} (\ln x + 1),$$

quindi il suo segno è determinato da quello dell'espressione fra parentesi e  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = e^{-1}$ . Da ciò segue

$$f'(x) > 0 \text{ se } 0 < x < e^{-1}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } x > e^{-1},$$

quindi  $x = e^{-1}$  è massimo assoluto. Inoltre, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0,$$

quindi la funzione estesa in  $x = 0$  col valore 0 è derivabile con derivata continua anche nell'origine.

La derivata seconda è data da

$$\begin{aligned} f''(x) &= - \left( f'(x) \frac{\ln x + 1}{x} + f(x) \frac{-\ln x}{x^2} \right) \\ &= \frac{f(x)}{x^2} (\ln^2 x + 3 \ln x + 1), \end{aligned}$$

quindi il suo segno è determinato da quello dell'espressione fra parentesi che è un polinomio di secondo grado in  $\ln x$  con radici  $y = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ se } \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) < x < \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right), \\ f''(x) &> 0 \text{ se } 0 < x < \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right), \quad x > \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &\text{ concava se } \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) < x < \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right), \\ f(x) &\text{ convessa se } 0 < x < \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right), \quad x > \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

e i punti di ascissa  $x = \exp\left(\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$  sono flessi a tangente obliqua.

**3.** Discutere, al variare di  $x \in \mathbf{R}$ , la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3^{5n} + 5^{3n}) x^n.$$

**Soluzione:** Si ponga  $a_n = 3^{5n} + 5^{3n}$ . Studiamo la convergenza assoluta della serie. Applicando il Criterio della Radice segue

$$\sqrt[n]{a_n |x|^n} = 3^5 \left( 1 + \left( \frac{5^3}{3^5} \right) \right)^{\frac{1}{n}} |x| \rightarrow 3^5 |x|.$$

La serie converge assolutamente per  $|x| < 3^{-5}$ . Per  $|x| = 3^{-5}$  la serie non converge nemmeno semplicemente dato che per tali valori

$$a_n |x|^n = 1 + \left( \frac{5^3}{3^5} \right)^n \rightarrow 1,$$

e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln^2 x \left( \frac{\ln x + \ln(\cot x)}{(x^x - 1)^2} \right) \right).$$

**Soluzione:** Si ricordino i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(t) - 1}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t \cot t = 1.$$

Dato che  $x^x = \exp(x \ln x)$ , il limite in questione, se esiste, è uguale al seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cot x - 1}{x^2}.$$

Dallo sviluppo di Taylor di  $\sin t$  e  $\cos t$  si ha

$$x \cot x - 1 = \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \left( -\frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) = -\frac{x^2}{3} + o(x^3),$$

e quindi il limite richiesto vale  $-\frac{1}{3}$ .

5. Discutere, al variare di  $\alpha \in \mathbf{R}$ , la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x|y|^\alpha \cos \frac{1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

**Soluzione:** La funzione è differenziabile in tutti i punti del tipo  $(x_o, y_o)$  con  $y_o \neq 0$  essendo prodotto di due funzione di classe  $C^1(\mathbf{R})$ .

Se  $y_o = 0$ , distinguiamo il caso  $x_o = 0$  da quello  $x_o \neq 0$ .

*Studio della continuità:*

(1)  $x_o \neq 0$ : per  $\alpha \leq 0$  la funzione non è continua. Infatti, fissato  $x_o \neq 0$ , la sua restrizione alla retta  $x = x_o$

$$f(x_o, y) = x_o |y|^\alpha \cos \frac{1}{y}$$

non ha limite per  $y \rightarrow 0$ .

Invece, per  $\alpha > 0$   $f$  è continua in  $(x_o, 0)$  perchè prodotto di funzioni di una variabile che sono continue nell'origine o che almeno possono essere ivi estese con continuità.

(2)  $x_o = 0$ : per  $\alpha < 0$  la funzione non è continua. Si consideri la restrizione di  $f$  alla curva  $y = |x|^{-\frac{1}{\alpha}}$ , cioè

$$f\left(x, |x|^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{x}{|x|} \cos\left(|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

e si noti che non ammette limite per  $x \rightarrow 0$ .

Invece, se  $\alpha \geq 0$  la funzione è continua in  $(0, 0)$  dato che

$$2|f(x, y)| \leq \begin{cases} x^2 + y^{2\alpha} & \text{se } \alpha > 0 \\ |x| & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate parziali della funzione  $f$ . Poichè

$$f(x, 0) = 0,$$

si ha

$$f_x(x, 0) = 0.$$

Inoltre, fissato  $x_o \in \mathbf{R}$ , se  $y \neq 0$  si ha

$$\frac{f(x_o, y) - f(x_o, 0)}{y} = x_o \frac{|y|^\alpha}{y} \cos \frac{1}{y},$$

allora

$$f_y(x_o, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_o = 0 \text{ o } x_o \neq 0 \text{ e } \alpha > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x_o \neq 0 \text{ e } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

*Studio della differenziabilità:*

(1)  $x_o \neq 0$ : per  $\alpha \leq 1$  la funzione non è differenziabile dato che risulta essere parzialmente derivabile nel punto  $(0, 0)$  (con  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ) se e solo se  $\alpha > 1$ .

Se  $\alpha > 1$  la funzione risulta differenziabile. Infatti, in tal caso per  $h, k$  sufficientemente piccoli si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_o + h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &= \left| \frac{(x_o + h)|k|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cos \frac{1}{k} \right| \leq \left| \frac{x_o |k|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{h |k|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |x_o| |k|^{\alpha-1} + \frac{h^2 + |k|^{2\alpha}}{2\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |x_o| |k|^{\alpha-1} + \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{2}. \end{aligned}$$

Da quest'ultima segue

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_o + h, k) - f(x_o, 0) - \nabla f(x_o, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

(2)  $x_o = 0$ : la funzione risulta essere parzialmente derivabile nel punto  $(0, 0)$  (con  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ) per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Per ogni  $\alpha > 0$  la funzione risulta differenziabile in  $(0, 0)$ . Infatti, in tal caso si ha

$$\left| \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{|h| |k|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} = g(h, k),$$

e  $g$  è omogenea di grado  $\alpha$ . Quindi passando a coordinate polari si ha

$$\left| \frac{f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta}} \right| \leq g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq \rho^\alpha.$$

Da quest'ultima segue

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Infine, se  $\alpha = 0$   $f$  non è differenziabile dato che

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cos \frac{1}{k},$$

quindi, ad esempio, si ha

$$\frac{f(h, h) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, h)}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{|h|} \cos \frac{1}{h}$$

che non ha limite per  $h \rightarrow 0$ .