

Corso di Laurea in Fisica
Analisi Matematica 1
1° Compitino
9 Novembre 2000
SOLUZIONI

1. Dimostrare per induzione che

- (a) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n};$
(b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n k.$

Soluzione. (a) L'uguaglianza è verificata per $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}.$

Supponiamo vera l'uguaglianza per $n \in \mathbf{N}$ e dimostriamo che allora è vera per $n + 1$, dal Principio di Induzione segue che allora è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n+1}} (2(n+2) - n - 1) \\ &= 2 - \frac{(n+3)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) Prima di procedere con la soluzione ricordiamo che vale la seguente formula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'uguaglianza è verificata per $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} k^2 = 1 = (-1)^2 \sum_{k=1}^1 k.$

Supponiamo vera l'uguaglianza per $n \in \mathbf{N}$, e dimostriamo che allora è vera per $n + 1$, dal Principio di Induzione segue che allora è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n k + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)}{2} (-n + 2n + 2) \\ &= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

2. Sia $\{a_n\}$ la successione così definita: $a_n = \left|1 - \frac{n^2}{10^4}\right|$ per $n \geq 0$.

Calcolare inf e sup dell'insieme

$$A = \left\{a_n : a_n^2 > 1 - (a_n - 1)^2\right\}.$$

Soluzione. Poichè $1 - (a_n - 1)^2 = -a_n^2 + 2a_n$, si ha

$$a_n^2 > 1 - (a_n - 1)^2 \Leftrightarrow a_n (a_n - 1) > 0,$$

e poichè $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$a_n^2 > 1 - (a_n - 1)^2 \Leftrightarrow a_n > 1,$$

da cui segue $A = \{a_n : a_n > 1\}$.

Si osservi che se n è tale che $a_n = 1 - \frac{n^2}{10^4}$ allora $0 \leq a_n \leq 1$, quindi gli n cercati sono tali che

$$a_n = \frac{n^2}{10^4} - 1 \geq 0.$$

D'altra parte imponendo la condizione $a_n > 1$, cioè

$$a_n = \frac{n^2}{10^4} - 1 > 1,$$

segue $n^2 > 2 \cdot 10^4$ e quindi $n \geq \lceil \sqrt{2} \cdot 10^2 \rceil + 1 = n_o$.

Per tali valori la successione è crescente e divergente a $+\infty$, da cui segue

$$\inf A = a_{n_o} \quad , \quad \sup A = +\infty.$$

3. Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} & n \geq 1 \\ a_0 = \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \end{cases} ,$$

provare che

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \operatorname{sgn}(\alpha);$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \operatorname{sgn}(\alpha).$$

Soluzione. Supponiamo $\alpha > 0$, per induzione si prova allora che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ da cui segue che $\{a_n\}$ è ben definita e crescente. Sia $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, allora $L > \alpha$ e se fosse $L \in \mathbf{R}$ dovrebbe verificare

$$L = L + \frac{1}{L} \Leftrightarrow \frac{1}{L} = 0$$

che non è possibile. Da cui $L = +\infty$.

Per provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$, proveremo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{n} = 2$ e quindi poichè $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e la funzione $x \rightarrow \sqrt{x}$ è continua su $[0, +\infty)$ seguirà la tesi.

Si noti che dalla definizione stessa della successione segue

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$$

da cui poichè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = 2$. Dal Teorema di Cesaro segue allora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{n} = 2.$$

Se $\alpha < 0$, basta porre $b_n = -a_n$ e osservare che

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} & n \geq 1 \\ b_0 = -\alpha > 0 \end{cases},$$

quindi per la discussione precedente segue la tesi.

4. Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \ln (3x^\alpha + e^{\alpha x}) \right).$$

Soluzione. Se $\alpha = 0$ allora il limite in questione si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) \ln (4) = 0.$$

Se $\alpha > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{1}{x} \right) \ln (3x^\alpha + e^{\alpha x}) &= \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \cdot \frac{1}{x} \ln \left(e^{\alpha x} \left(1 + \frac{3x^\alpha}{e^{\alpha x}} \right) \right) \\ &= \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \cdot \frac{1}{x} \left(\alpha x + \ln \left(1 + \frac{3x^\alpha}{e^{\alpha x}} \right) \right) \\ &= x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(\alpha + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{3x^\alpha}{e^{\alpha x}} \right) \right) \\ &= x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(\alpha + \frac{3x^{\alpha-1}}{e^{\alpha x}} \frac{1}{\frac{3x^\alpha}{e^{\alpha x}}} \ln \left(1 + \frac{3x^\alpha}{e^{\alpha x}} \right) \right) \end{aligned}$$

da cui per i limiti notevoli $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \ln (3x^\alpha + e^{\alpha x}) \right) = \alpha.$$

Se $\alpha < 0$ si ha

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln(3x^\alpha + e^{\alpha x}) &= \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \frac{1}{x} \ln\left(3x^\alpha \left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{3x^\alpha}\right)\right) \\ &= x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \left(\alpha \ln\left(3^{\frac{1}{\alpha}} x\right) + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{3x^\alpha}\right)\right)\end{aligned}$$

e quindi per i limiti notevoli $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln(3x^\alpha + e^{\alpha x}) \right) = 0.$$

5. Discutere al variare del parametro $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha \frac{\sin^2 x}{x}} - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x}{\log_\alpha(1+\alpha x)} + \frac{\ln(\alpha+x)}{2} & x > 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Se $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ essendo le funzioni $t \rightarrow e^{\alpha \frac{\sin^2 t}{t}} - 1$ e $t \rightarrow \frac{t}{\log_\alpha(1+\alpha t)} + \frac{\ln(\alpha+t)}{2}$ continue in x perchè somma, prodotto e composizione di funzioni continue in x , la Proprietà di Località implica la continuità di f in x .

Discutiamo la continuità di f nel punto $x = 0$. Fissato $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ calcoliamo i limiti destro e sinistro di f nello 0. Se tali limiti esistono e hanno lo stesso valore L allora esiste anche il limite di f nello 0 e vale L . Dalla continuità di $t \rightarrow e^t$ nello 0 e dal limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{\alpha \frac{\sin^2 x}{x}} - 1 \right) = 0.$$

Per calcolare il limite destro si ricordi che $\log_\alpha t = \frac{\ln t}{\ln \alpha}$, da cui per la continuità di $t \rightarrow \ln(\alpha + t)$ nello 0 e per il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ segue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\log_\alpha(1+\alpha x)} + \frac{\ln(\alpha+x)}{2} \right) = \frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln \alpha}{2}.$$

Quindi la funzione f risulta continua nell'origine se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln \alpha}{2} &= 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases},\end{aligned}$$

ed essendo nessuno dei due valori accettabile la funzione f non risulta mai essere continua in $x = 0$.