# CORSO di LAUREA in FISICA
## ANALISI MATEMATICA 1
### $1^o$ Compitino

9 Novembre 2000

**1.** Dimostrare per induzione che

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

**2.** Sia $\{a_n\}$ la successione così definita: $a_n = \left|1 - \frac{n^2}{10^4}\right|$ per $n \geq 0$.
Calcolare inf e sup dell'insieme

$$A = \left\{a_n : a_n^2 > 1 - (a_n - 1)^2\right\}.$$

**3.** Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} & n \geq 1 \\ \\ a_0 = \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

provare che

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty \operatorname{sgn}(\alpha)$;

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \operatorname{sgn}(\alpha)$.

**4.** Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln\left(3x^\alpha + e^{\alpha x}\right)\right).$$

**5.** Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha \frac{sen^2 x}{x}} - 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{\log_\alpha(1+\alpha x)} + \frac{\ln(\alpha + x)}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$