Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2024/2025)

1. Sia A un segmento iniziale finito di $\mathbf{N}$ (vale a dire $A = [1, n]$, per qualche $n \in \mathbf{N}$). Si consideri l'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni $f : A \to A \times \mathbf{N}$ definite come segue (per ogni $x \in A$):
   - $f(x) = (\varphi(x), n_{f,x})$, ove φ é una permutazione di A;
   - se x é il massimo del ciclo di φ a cui appartiene, allora $n_{f,x} = 1$;
   - se x non é il massimo del ciclo di φ a cui appartiene, allora $n_{f,x} > 1$.

   Inoltre, si definisca $\mathcal{F}_{n,k} = \{f \in \mathcal{F} \,|\, |A| = k, \sum_{x \in A} n_{f,x} = n\}$, e sia $t_{n,k} = |\mathcal{F}_{n,k}|$. Determinare una forma chiusa per $t_{n,k}$.

2. Sia $S(n, k)$ il numero di Stirling di II specie di indici n e k, e sia B_n l'n-esimo numero di Bell.
   (i) Determinare una forma chiusa per $S(n, 3)$.
   (ii) Dimostrare che, per $n \geq 3$, si ha $B_n < n!$.
   (iii) Dimostrare che, per $n \geq 2$, si ha $n! < S(2n, n) < (2n)!$.

3. Data una permutazione $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in S_n$, si dice che i é un'*eccedenza* quando $\pi_i > i$. Supponendo $n \geq 3$, determinare il numero di permutazioni di lunghezza n il cui insieme delle eccedenze contiene almeno uno fra $n - 1$ e $n - 2$.

4. Dimostrare che il reticolo $[\mathbf{N}, |]$ é un reticolo completo (ove naturalmente si assume che $0 \in \mathbf{N}$).

5. Un reticolo si dice *complementato* quando ogni suo elemento ammette almeno un complemento. Sia L un reticolo complementato tale che, per ogni $x, y \in L$, se esiste un complemento $\tilde{y}$ di y tale che $x \not\leq \tilde{y}$, allora $x \wedge y \neq 0$. Dimostrare che L é un reticolo distributivo. (*Suggerimento:* si consiglia di procedere dimostrando nell'ordine i seguenti fatti: (i) ogni elemento di L possiede un *unico* complemento (che si indicherá con x'); (ii) per ogni $x, y \in L$, se $x \leq y$ allora $x' \geq y'$; (iii) vale la seguente *legge di De Morgan*: per ogni $x, y \in L$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$; (iv) L é distributivo).

6. Sia L un reticolo distributivo finito. Dimostrare che esiste un'algebra di Boole finita tale che esiste un'immersione $\eta : L \to B$ che conserva il minimo e il massimo (si ricorda che un'immersione é un omomorfismo di reticoli iniettivo). Dimostrare inoltre che, se $|L| = n$, allora B può essere scelta in modo tale che $|B| \leq 2^{n-1}$.

7. Siano P_1, P_2 CPO. Si considerino le proiezioni $\pi_1 : P_1 \times P_2 \to P_1$ e $\pi_2 : P_1 \times P_2 \to P_2$ definite ponendo $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ $(i = 1, 2)$.
   (i) Dimostrare che $P_1 \times P_2$ é un CPO.
   (ii) Dimostrare che π_1 e π_2 sono funzioni continue.
   (iii) Dato Q CPO, sia $\varphi : Q \to P_1 \times P_2$; dimostrare che φ é una funzione continua se e solo se entrambe le funzioni $\pi_1 \circ \varphi$ e $\pi_2 \circ \varphi$ sono continue.

8. Sia NC_n l'insieme delle partizioni noncrossing di taglia n.
   (i) Dimostrare che NC_n é un reticolo.
   (ii) Calcolare la funzione di Möbius $\mu(0, 1)$ in NC_n (ove, al solito, $0, 1$ indicano rispettivamente il minimo e il massimo di NC_n).

9. Data una permutazione $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ di lunghezza n, la sua *sequenza delle inversioni* é la n-upla $I(\pi) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definita ponendo $x_{\pi_i} = |\{\pi_j \mid i < j, \pi_i > \pi_j\}|$, per ogni i. Ricordiamo che una permutazione é univocamente determinata dalla sua sequenza delle inversioni, e che $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é la sequenza delle inversioni di qualche permutazione se e solo se $x_i < i$, per ogni i.

   Introduciamo un ordine parziale sull'insieme S_n delle permutazioni di lunghezza n, definendo $\pi \leq \sigma$ quando $I(\pi) \leq I(\sigma)$ componente per componente, e poniamo $\mathcal{P}_n = (S_n, \leq)$.

   (i) Dimostrare che $\mathcal{P}_n$ ha rango, determinando esplicitamente la sua funzione rango.
   (ii) Dimostrare che il numero di intervalli di $\mathcal{P}_n$ é $\frac{n!(n+1)!}{2^n}$.
   (iii) Il *rango* di un intervallo $[\pi, \sigma]$ di $\mathcal{P}_n$ é definito come la differenza fra il rango di σ e il rango di π. Determinare una ricorrenza per il numero $f(n, k)$ degli intervalli di $\mathcal{P}_n$ di rango k.
   (iv) Un intervallo $[\pi, \sigma]$ di $\mathcal{P}_n$ si dice *Booleano* quando é isomorfo ad un'algebra di Boole. Dimostrare che il numero di intervalli Booleani di $\mathcal{P}_n$ é $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$ (prodotto dei primi $2n - 1$ numeri dispari).
   (v) Determinare il numero $b(n, k)$ di intervalli Booleani di $\mathcal{P}_n$ di rango k.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.