Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2022/2023)

1. Dato un insieme finito A, una *partizione di Lah* di A é una partizione di A in cui ogni blocco é munito di un ordine lineare. Fissati $n, k \in \mathbf{N}$, indichiamo con $L_{n,k}$ il numero di partizioni di Lah di un insieme di cardinalitá n con k blocchi. Determinare una ricorrenza (e condizioni iniziali) per $L_{n,k}$. Dimostrare inoltre le seguenti identitá polinomiali (ove $(x)^n = x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)$ é il fattoriale crescente):

   (i) $(x)^n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x)_k$;

   (ii) $(x)_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(-1)^{n-k}(x)^k$.

2. La *diagonale principale* di un diagramma di Ferrers é l'insieme delle celle del diagramma ottenuto a partire dalla cella in alto a sinistra e muovendosi in diagonale verso destra e verso il basso. Ad esempio, la diagonale principale del diagramma di Ferrers della partizione intera $(5, 5, 2, 1)$ contiene 2 celle. Nel seguito, presa $\lambda \vdash n$, poniamo $|\lambda| = n$; inoltre, indichiamo con $r(n, k)$ il numero di partizioni intere di n in al piú k parti.

   (i) Dimostrare che, se λ é una partizione autoconiugata, allora $|\lambda| \equiv d \pmod 2$.

   (ii) Sia $p_d(n)$ il numero di partizioni di n la cui diagonale contiene d celle. Dimostrare la seguente uguaglianza:

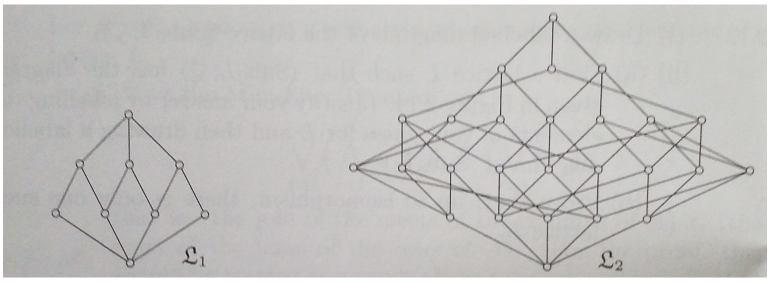
   $$p_d(n) = \sum_{m \geq 0} r(m, d) r(n - m - d^2, d).$$

3. Dato un numero naturale $n \neq 0$, una *composizione* di n in k parti é una k-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ di numeri naturali diversi da 0 tale che $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$. Inoltre, per convenzione, diremo che l'unica composizione di 0 é la composizione vuota. Sia $f(n, k)$ il numero di composizioni di n in k parti in cui ogni parte é maggiore o uguale a 2. Determinare un'espressione per $f(n, k)$.

4. Dato un reticolo L, poniamo $\operatorname{Sub}_0 L = \operatorname{Sub} L \cup \{\emptyset\}$, ove $\operatorname{Sub} L$ é il reticolo dei sottoreticoli di L.

   (i) Dimostrare che non esiste alcun reticolo L tale che $\operatorname{Sub}_0 L$ é isomorfo al reticolo $\mathcal{L}_1$ (vedi figura).

   (ii) Dimostrare che esistono *al piú* due reticoli L tali che $\operatorname{Sub}_0 L$ é isomorfo al reticolo $\mathcal{L}_2$ (vedi figura).



5. Dato un insieme parzialmente ordinato Q, ricordiamo che l'insieme $Q^X = \{f : X \to Q\}$ é un insieme parzialmente ordinato con l'ordine parziale definito ponendo $f \leq g$ quando, per ogni $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$ (in Q). Inoltre, se $X = P$ é anch'esso un insieme parzialmente ordinato, l'insieme $Q^{\langle P \rangle} = \{f : P \to Q \,|\, f \text{ crescente}\}$ é anch'esso un insieme parzialmente ordinato (sempre con la relazione d'ordine puntuale). Infine, se $Q = L$ é un reticolo, l'insieme parzialmente ordinato $L^{\langle P \rangle}$ é un reticolo.

   (i) Dimostrare che $L^{\langle P \rangle}$ é un sottoreticolo di L^P (e dunque é distributivo, se L é distributivo).

   (ii) Indichiamo al solito con $\mathcal{O}(P)$ il reticolo degli insiemi discendenti dell'insieme parzialmente ordinato P. Dimostrare che, per ogni P, Q insiemi parzialmente ordinati, si ha:

   $$\mathcal{O}(Q)^{\langle P \rangle} \simeq \mathcal{O}(P^{\partial} \times Q).$$

   (iii) Indichiamo al solito con $\mathcal{J}(L)$ l'insieme degli elementi $\vee$-irriducibili del reticolo L. Dimostrare che, se L é un reticolo distributivo finito e P é un insieme parzialmente ordinato finito, allora

   $$\mathcal{J}(L^{\langle P \rangle}) \simeq P^{\partial} \times \mathcal{J}(L).$$

6. Un insieme parzialmente ordinato non vuoto S si dice *semireticolo superiore* quando, per ogni $x, y \in S$, esiste $x \vee y$ in S. Un sottoinsieme non vuoto $J \subseteq S$ si dice *ideale* di S quando é un insieme discendente chiuso per unioni finite.

   (i) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{I}(S)$ degli ideali di un semireticolo superiore con minimo S é una struttura di chiusura algebrica con massimo e che $K(\mathcal{I}(S)) \simeq S$.

   (ii) Dalla teoria sappiamo che, per ogni reticolo completo L, $K(L)$ é un semireticolo superiore con minimo. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

      (a) L é un reticolo algebrico;

(b) $L \simeq \mathcal{I}(K(L))$;

(c) $L \simeq \mathcal{I}(S)$, per qualche semireticolo con minimo S.

7. Sia P un CPO e sia $F : P \to P$ una funzione crescente. Poniamo $Q = \{x \in P \,|\, x \leq F(x)$ e, per ogni $y \in Fix(F)$, $x \leq y\}$ (ove $Fix(F)$ é l'insieme dei punti fissi di F). Si noti che non si sta richiedendo che F abbia punti fissi (se non ne ha, la seconda condizione nella definizione di Q é automaticamente soddisfatta).

   (i) Dimostrare che Q é un sotto-CPO di P.

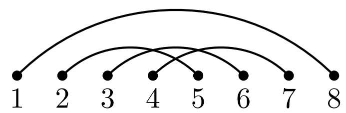
   (ii) Se Q possiede un elemento massimale β, allora β é il minimo punto fisso di F.

8. Sia L un reticolo finito, con minimo 0 e massimo 1. Dato $a \in L$, indichiamo con $a^{\perp}$ l'insieme dei complementi di a (ricordiamo che x si dice *complemento* di a quando $x \wedge a = 0$ e $x \vee a = 1$). Dimostrare che, per ogni $a \in L$, si ha:

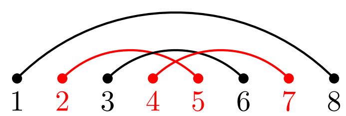
$$\mu(0,1) = \sum_{w,z \in a^{\perp}} \mu(0,w)\zeta(w,z)\mu(z,1),$$

ove μ é la funzione di Möbius di L e ζ é la funzione zeta di L.

9. Un *matching di ordine n* é un partizione dell'insieme $[2n] = \{1, \ldots, 2n\}$ in blocchi di cardinalità 2. Un matching di ordine n viene comunemente rappresentato come un grafo avente $[2n]$ come insieme dei vertici in cui i lati sono i blocchi del matching. Qui sotto é rappresentato il matching $\tau = \{\{1,8\},\{2,5\},\{3,6\},\{4,7\}\}$ di ordine 4:



Sia $k \leq n$, e siano σ, τ matchings di ordine k ed n, rispettivamente. Diciamo che σ é un *pattern* di τ quando esistono $n-k$ lati di τ che, una volta rimossi da τ, fanno sí che i k lati rimanenti rappresentino il matching σ (dopo aver rinominato i vertici coinvolti, in modo tale che l'i-esimo vertice piú piccolo sia rinominato i). Nella figura sotto, i lati rossi testimoniano che il matching $\sigma = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ é un pattern del matching τ rappresentato nella figura precedente:



Sia $\mathcal{M}$ l'insieme di tutti i matchings di ordine finito. Dati $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando σ é un pattern di τ, definendo cosí una strutture di ordine parziale su $\mathcal{M}$.

Un matching non vuoto si dice *connesso* quando non puó essere rappresentato come concatenazione (=unione disgiunta) di due matching non vuoti. Una *componente connessa* di un matching τ é un pattern connesso massimale di τ. Si osserva facilmente che ogni matching puó essere espresso come la concatenazione delle sue componenti connesse.

Sia σ un matching connesso (che d'ora in poi considereremo fissato). Dato $\alpha \in \mathcal{M}$, scriviamo $\alpha = M\rho$ (la scrittura $M\rho$ indica la concatenazione del matching M col matching ρ), ove ρ é il piú lungo suffisso di componenti connesse di α tale che $\rho \leq \sigma$. Si noti che sia M che ρ possono essere eventualmente vuoti. Definiamo la funzione $k_\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ponendo $k_\sigma(\alpha) = k_\sigma(M\rho) = M\sigma$.

(i) Dimostrare che k_σ é un operatore di chiusura su $\mathcal{M}$.

(ii) Dimostrare che, se α é un matching non vuoto la cui componente connessa più a destra non é un singolo lato, allora $\mu(\frown, \alpha\frown) = -\mu(\frown, \alpha)$, ove μ é la funzione di Möbius dell'insieme parzialmente ordinato $\mathcal{M}$; inoltre, per ogni matching α, $\mu(\frown, \alpha\frown\frown) = 0$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.