Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2021/2022)

1. Per gli scopi di questo esercizio, i *numeri di Fibonacci* sono definiti tramite la ricorrenza $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, valida per $n \geq 2$, con le condizioni iniziali $F_0 = 0, F_1 = 1$.

   Dato $n \in \mathbf{N}$, chiamiamo *Fibotoriale* di n il numero $F_n^! = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n$, per $n \geq 1$, e inoltre $F_0^! = 1$. Chiamiamo poi *coefficienti Fibonomiali* i numeri:
$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n^!}{F_k^! F_{n-k}^!}.$$

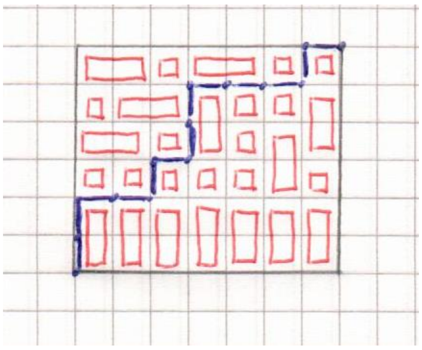
   (i) Dimostrare che i coefficienti Fibonomiali soddisfano le condizioni iniziali $\binom{n}{0}_F = \binom{n}{n}_F = 1$ e la ricorrenza:
$$\binom{n}{k}_F = F_{n-k+1}\binom{n-1}{k-1}_F + F_{k-1}\binom{n-1}{k}_F,$$
   per $0 < k < n$.

   (ii) Dimostrare che i coefficienti Fibonomiali sono numeri naturali.

   (iii) Nel piano discreto si consideri la classe $\Gamma_{n,m}$ dei cammini che partono dall'origine, terminano nel punto di coordinate (n, m) ed utilizzano esclusivamente passi $N = (0, 1) =\uparrow$ e $E = (1, 0) =\rightarrow$. Ogni cammino di $\Gamma_{n,m}$ divide il rettangolo $n \times m$ che lo contiene in due regioni, che chiameremo *regione superiore* (quella sopra al cammino) e *regione inferiore* (quella sotto al cammino). Consideriamo il diagramma di Ferrers *superiore* costituito dalle righe della regione superiore e il diagramma di Ferrers *inferiore* costituito dalle colonne della regione inferiore. Chiamiamo *cammino decorato* ogni cammino di $\Gamma_{n,m}$ in cui ciascuna riga del diagramma di Ferrers superiore e ciascuna colonna del diagramma di Ferrers inferiore é tassellata utilizzando momomeri e dimeri, con l'ulteriore condizione che, nel caso del diagramma di Ferrers inferiore, il tassello piú basso di ogni colonna deve essere necessariamente un dimero (si veda la figura sotto per un esempio). Dimostrare che il coefficiente Fibonomiale $\binom{n+m}{n}_F$ conta il numero di cammini decorati di $\Gamma_{n,m}$.

2. Sia $f(n)$ il numero di partizioni noncrossing prive di singoletti. Determinare una relazione di ricorrenza e la funzione generatrice di $f(n)$.

3. Sia $g(n)$ il numero di partizioni insiemistiche di $[n]$ i cui blocchi non contengono elementi consecutivi. Determinare un'espressione per $g(n)$.



4. Sia P un insieme parzialmente ordinato e sia $Q \subseteq P$. Si considerino le seguenti affermazioni:

   (i) Q é $\vee$-denso in P;

   (ii) per ogni $a \in P$, $a = \bigvee(\downarrow a \cap Q)$;

   (iii) per ogni $a, b \in P$, con $b < a$, esiste $x \in Q$ tale che $x \leq a$ e $x \nleq b$.

   Dimostrare che valgono le implicazioni (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Dimostrare inoltre che, se P é un reticolo completo, vale anche l'implicazione (iii) $\Rightarrow$ (ii).

5. Sia P un insieme parzialmente ordinato finito. Come di consueto, indichiamo con $\mathcal{O}(P)$ l'insieme parzialmente ordinato degli insiemi discendenti di P (con l'ordine naturale dato dall'inclusione).

   (i) Dimostrare che un insieme discendente U é $\wedge$-irriducibile in $\mathcal{O}(P)$ se e solo se é della forma $P \setminus \uparrow x$, per qualche $x \in P$.

   (ii) Provare che P é isomorfo a $\mathcal{M}(\mathcal{O}(P))$ (che é l'insieme parzialmente ordinato degli $\wedge$-irriducibili di $\mathcal{O}(P)$).

   (iii) Dimostrare che $\mathcal{M}(\mathcal{O}(P))$ é isomorfo a $\mathcal{J}(\mathcal{O}(P))$ (insieme parzialmente ordinato dei $\vee$-irriducibili di $\mathcal{O}(P)$).

   (iv) Dimostrare che, per ogni reticolo distributivo finito L, $\mathcal{J}(L)$ é isomorfo a $\mathcal{M}(L)$.

6. Siano L ed M due reticoli con massimo e minimo, e indichiamo rispettivamente con $\mathcal{I}(L)$ e $\mathcal{I}(M)$ i reticoli dei loro ideali. Sia inoltre (f, g) una connessione di Galois tra L ed M.

   (i) Dimostrare che la funzione $G : \mathcal{I}(M) \to \mathcal{I}(L)$ definita ponendo $G(J) = f^{-1}(J)$ é effettivamente ben definita (vale a dire $G(J) \in \mathcal{I}(L)$); mostrare inoltre che $G(J) = \downarrow g(J)$.

   (ii) Sia $F : \mathcal{I}(L) \to \mathcal{I}(M)$ definita ponendo $F(I) = \downarrow f(I)$; dimostrare che la coppia (F, G) é una connessione di Galois tra $\mathcal{I}(L)$ e $\mathcal{I}(M)$.

7. Siano P_1, P_2 e Q CPO, e sia $\varphi : P_1 \times P_2 \to Q$ una funzione.

   (i) Per ogni $x \in P_1$ e per ogni $y \in P_2$, si definiscano le funzioni

   $$\begin{aligned} \varphi^x &: P_2 \to Q \\ &: v \mapsto \varphi(x, v) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \varphi_y &: P_1 \to Q \\ &: u \mapsto \varphi(u, y) \end{aligned}$$

   Dimostrare che φ é continua se e solo se φ^x e φ_y sono continue, per ogni $x \in P_1, y \in P_2$.

   (ii) Dati due CPO X, Y, indichiamo con $[X \to Y]$ l'insieme parzialmente ordinato delle funzioni continue da X a Y con l'ordine puntuale (vale a dire, date $f, g \in [X \to Y]$, poniamo $f \leq g$ quando $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$). Dimostrare che i CPO $[P_1 \times P_2 \to Q]$ e $[P_1 \to [P_2 \to Q]]$ sono isomorfi.

8. Sia P un insieme parzialmente ordinato finito con minimo 0. Indicata al solito con μ la funzione di Möbius di P, si ponga per definizione $\mu(x) = \mu(0, x)$, per ogni $x \in P$. Data una relazione di equivalenza $\sim$ su P, si definisca la relazione binaria $\sqsubseteq$ sul quoziente $P/\sim$ ponendo $X \sqsubseteq Y$ quando esistono un elemento $x \in X$ ed un elemento $y \in Y$ tali che $x \leq y$ in P (con $X, Y \in P/\sim$). In generale, la relazione binaria $\sqsubseteq$ non é un ordine parziale su $P/\sim$. Si dice che $P/\sim$ é un *quoziente omogeneo* di P quando la relazione binaria $\sqsubseteq$ sopra definita soddisfa le due ulteriori condizioni seguenti:

   (1) la classe di equivalenza contenente 0 é il singoletto $\{0\}$.

   (2) date $X, Y \in P/\sim$, se $X \sqsubseteq Y$, allora per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ tale che $x \leq y$ in P.

   (i) Dimostrare che, se $P/\sim$ é un quoziente omogeneo di P, allora $\sqsubseteq$ é una relazione d'ordine parziale.

   (ii) Sia $P/\sim$ un quoziente omogeneo di P. Si supponga che, per ogni $X \in P/\sim$, con $X \neq \{0\}$, si abbia che

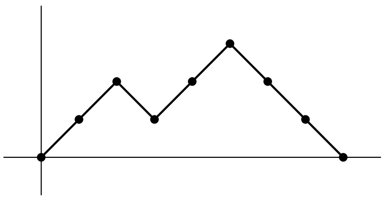
   $$\sum_{y \in \downarrow X} \mu(y) = 0,$$

   ove $\downarrow X$ é l'insieme discendente generato da X (in P). Dimostrare che, per ogni $X \in P/\sim$, si ha:

   $$\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(x)$$

(ove la funzione di Möbius a primo membro é calcolata in $P/\sim$, mentre la funzione di Möbius a secondo membro é calcolata in P).

9. Un *cammino di Dyck* é un cammino nel piano discreto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ che parte dall'origine di un fissato sistema di rifermiento cartesiano, termina sull'asse delle x, non scende mai al di sotto dell'asse delle x e utilizza i seguenti due tipi di passi: $U = (1, 1)$ e $D = (1, -1)$. La *lunghezza* di un cammino di Dyck é il numero dei suoi passi. Qui sotto viene riportato un esempio di cammino di Dyck.



Un cammino di Dyck si puó rappresentare in modo equivalente come parola w sull'alfabeto binario $\{U, D\}$ che soddisfa le seguenti proprietá: ogni prefisso di w contiene almeno tante lettere U quante lettere D; il numero totale di lettere U in w é uguale al numero totale di lettere D.

Definiamo sull'insieme $\mathcal{D}$ di tutti i cammini di Dyck il seguente ordine parziale: dati due cammini di Dyck w e w', poniamo $w \leq w'$ quando esiste una sottoparola (non necessariamente consecutiva) di w' uguale a w.

Fissati $a, b \in \mathbf{N}$, con $1 \leq a \leq b$, poniamo $w_{(a,b)} = U^a D^a U^b D^b$. Determinare una forma chiusa (in funzione di a e di b) per la cardinalitá dell'intervallo $[UD, w_{(a,b)}] = \{w \in \mathcal{D} \,|\, UD \leq w \leq w_{(a,b)}\}$ in $\mathcal{D}$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.