Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2020/2021)

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando la controimmagine di ogni elemento $x \in X$, $f^{-1}(x)$, é dotata di un ordine totale. In base a tale definizione, le due funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando le controimmagini degli elementi del codominio degli ordini totali $f^{-1}(a) = g^{-1}(a) = \{1 < 2\}$, $f^{-1}(b) = \{3 < 4 < 5\}$, $g^{-1}(b) = \{4 < 5 < 3\}$ sono da considerarsi differenti. Determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite, funzioni arricchite iniettive e funzioni arricchite suriettive da N a X.

2. Ricordiamo che i *numeri di Stirling di I specie senza segno* $c_{n,k}$ contano il numero di permutazioni di lunghezza n aventi k cicli. Fornire una dimostrazione combinatoria della seguente identità:

$$c_{n+1,k+1} = \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!} c_{j,k}.$$

3. In una permutazione $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ (scritta in forma lineare), diciamo che $i \leq n - 1$ é un'*ascesa consecutiva* quando $\pi_{i+1} = \pi_i + 1$. Determinare un'espressione per il numero di permutazioni di lunghezza n prive di ascese consecutive.

4. Date due relazioni binarie R, R' sullo stesso insieme X, poniamo $R \subseteq R'$ quando, per ogni $x, y \in X$, xRy implica che $xR'y$. Inoltre, scriveremo $R \subset R'$ per intendere che $R \subseteq R'$ e $R \neq R'$.

   Sia (G, M, I) il contesto descritto nella tabella seguente:

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	×			×	×			×
B	×	×					×	×
C	×		×			×		×
D	×	×	×	×				
E	×	×			×	×		
F	×		×		×		×	

   Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo di concetti $\mathfrak{B}(G, M, I)$, indicando anche le etichette corrispondenti alle mappe γ e μ. Dimostrare inoltre che non esiste $I' \subset I$, con I' ovunque definita e suriettiva, tale che $\mathfrak{B}(G, M, I') \simeq \mathfrak{B}(G, M, I)$.

5. Sia B un'algebra di Boole e, per ogni $X \subseteq B$, sia $\langle X \rangle$ la piú piccola sottoalgebra di B contenente X. Ricordiamo che $\mathbf{BT}$ indica l'insieme dei polinomi booleani (in un insieme arbitrario di variabili). Dimostrare che:

$$\langle X \rangle = \{p(a_1, a_2, \dots a_n) \,|\, n \in \mathbf{N}_0, p \in \mathbf{BT}, a_1, a_2, \dots a_n \in B\}.$$

6. Illustrare un controesempio per ciascuna delle seguenti affermazioni:
   (i) se L e K sono reticoli finiti e $\mathcal{J}(L) \simeq \mathcal{J}(K)$, allora L e K sono isomorfi;
   (ii) se L é un reticolo distributivo, allora $L \simeq \mathcal{O}(\mathcal{J}(L))$;
   (iii) se L é un reticolo distributivo finito e $\mathcal{J}(L)$ é un reticolo, allora $\mathcal{J}(L)$ é un sottoreticolo di L;
   (iv) se L é un reticolo finito, allora $\mathcal{J}(L) \simeq \mathcal{M}(L)$.

7. Siano P, Q insiemi parzialmente ordinati completi (CPO). Dimostrare che il prodotto diretto $P \times Q$ é un CPO.

8. Dato un insieme parzialmente ordinato P, si consideri l'insieme parzialmente ordinato $\hat{P}$ ottenuto da P aggiungendo un nuovo minimo $\hat{0}$ e un nuovo massimo $\hat{1}$. Chiamiamo *numero di Möbius* di P la quantitá $\mu(P) = \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1})$. Nell'ipotesi che esista $a \in P$ confrontabile con tutti gli elementi di P, si dimostri che $\mu(P) = 0$.

9. Sia $f(n)$ il numero di sequenze di 0,1,2 di lunghezza n prive di 1 adiacenti e di 2 adiacenti. In particolare, $f(0) = 1$ (la sequenza vuota soddisfa la condizione sopra descritta). Determinare la funzione generatrice (ordinaria) di $(f(n))_{n \geq 0}$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.