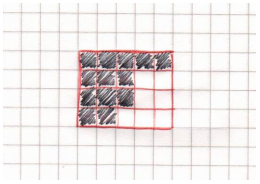
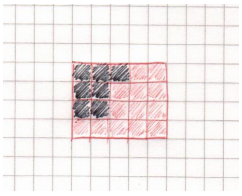
Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2019/2020)

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando il suo nucleo, cioé l'insieme dei blocchi costituiti dalle controimmagini di ogni elemento dell'immagine, é dotato di un ordine totale. In base a tale definizione, le funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando i nuclei degli ordini totali $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, $g^{-1}(b) < g^{-1}(a)$ sono da considerarsi differenti. Supponiamo ora che gli elementi di N siano distinguibili, mentre quelli di X siano indistinguibili. In questa ipotesi, determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite da N a X dei seguenti tipi: funzioni arricchite generiche, funzioni arricchite suriettive, funzioni arricchite iniettive.

2. Data una partizione λ di n in k parti la cui massima parte é m, il diagramma di Ferrers di λ puó essere incluso in un rettangolo $m \times k$ come illustrato nella figura sotto nel caso della partizione intera $(5, 3, 3, 2)$.



Chiamiamo *complemento di* λ la partizione λ^c il cui diagramma di Ferrers si ottiene ruotando il rettangolo di 180° e prendendo le celle che non fanno parte del diagramma di Ferrers di λ. Nella figura sotto viene illustrata la partizione complementare di $(5, 5, 3, 2)$, che é $(3, 2, 2)$.



Caratterizzare le partizioni per le quali, iterando l'operazione di complemento un numero opportuno di volte, si ottiene la partizione (1).

3. In quanti modi k libri distinti possono essere disposti su n scaffali distinti in modo tale che ogni scaffale contenga al piú m libri?

4. Un anello con identitá R si dice *anello booleano* quando, per ogni $x \in R$, $x^2 = x$.

   (i) Dimostrare che in un anello booleano valgono le identitá seguenti (per ogni x, y):
   (a) $xy + yx = 0$;
   (b) $x + x = 0$;
   (c) $xy = yx$.

   (ii) Sia B un'algebra di Boole, e si definisca:

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

   Dimostrare che $[B; +, \cdot]$ é un anello Booleano.

   (iii) Sia R un anello Booleano, e si definisca:

$$x \vee y = x + y + xy, \qquad x \wedge y = xy, \qquad x' = 1 + x.$$

   Dimostrare che $[R; \vee, \wedge, ', 0, 1]$ é un'algebra di Boole.

   (iv) Dimostrare che la corrispondenza descritta nei punti (ii) e (iii) tra algebre di Boole e anelli Booleani é biiettiva.

5. Sia L un reticolo distributivo finito, con $|L| > 1$. Sia $\mathbf{2}$ l'insieme parzialmente ordinato il cui sostegno é $\{0, 1\}$, in cui $0 < 1$. Si ponga $X = \{f : L \to \mathbf{2} \mid f \text{ é omomorfismo di reticoli}, f(0) = 0, f(1) = 1\}$, e si consideri X parzialmente ordinato con l'ordine puntuale.

   (i) Sia $a \in J(L)$ e si definisca $f_a : L \to \mathbf{2}$ ponendo

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq a, \\ 0 & \text{se } x \ngeq a. \end{cases}$$

   Dimostrare che $f_a \in X$.

   (ii) Dimostrare che la funzione $\varepsilon : J(L) \to X^\partial$, definita ponendo $\varepsilon(a) = f_a$ per ogni $a \in J(L)$, é un isomorfismo d'ordine da $J(L)$ a X^∂, la cui inversa é la funzione $\eta : X^\partial \to J(L)$ definita ponendo $\eta(f) = \bigwedge\{x \in L \mid f(x) = 1\}$, per ogni $f \in X$.

6. Sia L un reticolo completo. Dimostrare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

   (i) $K(L) = L$, ove $K(L)$ indica l'insieme degli elementi compatti di L;

   (ii) ogni sottoinsieme diretto di L ha massimo;

   (iii) L soddisfa la condizione della catena ascendente, vale a dire per ogni catena $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$ di elementi di L esiste $i \in \mathbf{N}$ tale che $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+n} = \cdots$.

7. Sia L un reticolo completo e si definisca $F : \wp(L) \to \wp(L)$ ponendo $F(A) = \downarrow \bigvee A$. Dimostrare che F conserva l'ordine e che $fix(F) \simeq L$.

8. Dato un insieme parzialmente ordinato P, si consideri l'insieme parzialmente ordinato $\hat{P}$ ottenuto da P aggiungendo un nuovo minimo $\hat{0}$ e un nuovo massimo $\hat{1}$. Si definisca il *numero di Möbius* $\mu(P)$ di P ponendo $\mu(P) = \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1})$.

   Sia I un insieme discendente di P. Dimostrare che

$$\mu(P) = \mu(I) + \sum_{y \in P \setminus I} \mu(\uparrow y \setminus \{y\}) \mu(\downarrow y \cap I).$$

9. Sia S l'insieme di tutte le permutazioni. Per ogni $\pi \in S$, indichiamo con $|\pi|$ la lunghezza della permutazione π. Definiamo il seguente ordine parziale su S: date $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $\tau = \tau_1, \cdots \tau_n \in S$, con $|\sigma| \leq |\tau|$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando ci sono $k = |\sigma|$ elementi consecutivi $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_{i+k}$ in τ tali che la stringa $\tau_{i+1}\tau_{i+2} \cdots \tau_{i+k}$ é "isomorfa" alla permutazione σ, nel senso che, per ogni $l < m$, $\tau_{i+l} < \tau_{i+m}$ se e solo se $\sigma_l < \sigma_m$. Ad esempio, $321 < 431825976$ perché la stringa 431 contenuta in 431825976 é isomorfa a 321, mentre $231 \not< 431825976$. Quando $\sigma \leq \tau$, un'*occorrenza* di σ in τ é una stringa contenuta in τ isomorfa a σ. Ad esempio, 431825976 contiene 2 occorrenze di 321, che sono le stringhe 431 e 976, e una sola occorrenza di 312, che é la stringa 825.

   Supponiamo che $\sigma \leq \tau$, e che ci sia esattamente una occorrenza di σ in τ (l'esempio precedente mostra proprio questa situazione nel caso $\sigma = 312$). Calcolare $\mu(\sigma, \tau)$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.