Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2018/2019)

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando la controimmagine di ogni elemento $x \in X$, $f^{-1}(x)$, é dotata di un ordine totale. In base a tale definizione, le due funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando le controimmagini degli elementi del codominio degli ordini totali $f^{-1}(a) = g^{-1}(a) = \{1 < 2\}$, $f^{-1}(b) = \{3 < 4 < 5\}$, $g^{-1}(b) = \{4 < 5 < 3\}$ sono da considerarsi differenti. Supponiamo ora che gli elementi di N siano distinguibili, mentre quelli di X siano indistinguibili. In questa ipotesi, determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite, funzioni arricchite iniettive e funzioni arricchite suriettive da N a X.

2. Una partizione insiemistica π di $[n] = \{1, 2, \dots n\}$ si dice *nonnesting* quando non esistono elementi $a, b, c, d \in [n]$, con $a < b < c < d$, tali che $a, d \in B$ e $b, c \in C$ per due blocchi distinti B, C di π.

   Sia $f(n)$ il numero della partizioni nonnesting di $[n]$. Dimostrare che $f(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$, l'$n$-esimo numero di Catalan.

   Suggerimento: piuttosto che provare direttamente la formula richiesta, puó essere conveniente trovare una biiezione tra le partizioni nonnesting e una delle tante strutture contate dai numeri di Catalan.

3. Dimostrare in modo combinatorio la seguente identitá ($n, m, r \in \mathbf{N}, m \leq r \leq n$):
$$\binom{n-m}{r-m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{n-k}{r}.$$

4. Sia $D_0 = \{n \in \mathbf{N} \mid 2 \nmid n\} \cup \{0\}$.

   (i) Sia $\varphi : \mathbf{N}_0 \to D_0$ definita ponendo $\varphi(0) = 0$ e, per ogni $n \neq 0$, $\varphi(n) = \frac{n}{2^k}$, ove 2^k é la massima potenza di 2 che divide n. Dimostrare che, se $\mathbf{N}_0$ e D_0 sono dotati dell'ordine parziale definito dalla divisibilitá, φ conserva l'ordine ed é suriettiva, ma non é un isomorfismo d'ordine.

   (ii) Dimostrare che i due insiemi parzialmente ordinati $(\mathbf{N}_0, |)$ e $(D_0, |)$ sono isomorfi.

5. Dato un contesto (G, M, I), si definisce il suo *contesto complementare* $(G, \overline{M}, \overline{I})$ ponendo $\overline{M} = \{\overline{m} \mid m \in M\}$ e, per ogni $g \in G$ e $\overline{m} \in \overline{M}$, $g\overline{I}\overline{m}$ quando $g \not{I} m$.

   Si consideri il contesto (G, M, I) descritto nella seguente tabella:

	a	b	c	d	e	f	g
A	×	×	×	×	×	×	
B	×	×	×	×	×	×	
C	×	×	×	×	×	×	
D	×	×	×	×			
E	×	×	×	×	×	×	
F	×		×	×		×	
G	×	×	×		×	×	×
H							
L			×				×

Determinare tutti i concetti del suo contesto complementare e disegnare il diagramma di Hasse del reticolo di concetti associato, indicando anche le etichette corrispondenti alle mappe γ e μ.

6. (i) Siano L, K reticoli, e si supponga che esista un'immersione (vale a dire una funzione che conserva e riflette l'ordine) da N_5 a $L \times K$. Dimostrare che esiste un'immersione da N_5 a L o da N_5 a K.
   (ii) Supponendo inoltre che L e K siano entrambi modulari, dimostrare che (i) vale con M_3 al posto di N_5.

7. Sia L un reticolo con minimo 0. L si dice *pseudocomplementato* quando, per ogni $a \in L$, esiste $a^* \in L$ tale che, per ogni $b \in L$, $a \wedge b = 0$ se e solo se $b \leq a^*$.
   (i) Dimostrare che ogni algebra di Boole é pseudocomplementata.
   (ii) Dimostrare che ogni catena con massimo e minimo é pseudocomplementata.
   (iii) Dimostrare che ogni reticolo distributivo é pseudocomplementato.

8. (i) Sia P un insieme parzialmente ordinato finito con minimo 0 e massimo 1, e sia μ la sua funzione di Möbius. Sia $f : P \to \mathbb{C}$ una funzione. Dimostrare che:

$$\begin{aligned}&\sum (f(t_1)-1)(f(t_2)-1)\cdots(f(t_2)-1)\\ =&\sum (-1)^{k+1}\mu(0,t_1)\mu(t_1,t_2)\cdots\mu(t_k,1)f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_k),\end{aligned}$$

   ove le sommatorie sono al variare di $t_1 < \cdots < t_k$ catena di P, con $t_1 > 0$ e $t_k < 1$.
   (ii) Usando il punto precedente, dimostrare che:

$$\sum_{0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1} (-1)^k \mu(t_0,t_1)\mu(t_1,t_2)\cdots\mu(t_{k-1},t_k) = 1.$$

9. Sia S l'insieme di tutte le permutazioni. Per ogni $\pi \in S$, indichiamo con $|\pi|$ la lunghezza della permutazione π. Definiamo il seguente ordine parziale su S: date $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n \in S$, con $|\sigma| \leq |\tau|$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando ci sono $k = |\sigma|$ elementi consecutivi $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_{i+k}$ in τ tali che la stringa $\tau_{i+1}\tau_{i+2} \cdots \tau_{i+k}$ é "isomorfa" alla permutazione σ, nel senso che, per ogni $l < m$, $\tau_{i+l} < \tau_{i+m}$ se e solo se $\sigma_l < \sigma_m$. Ad esempio, $321 < 431825976$ perché la stringa 431 contenuta in 431825976 é isomorfa a 321, mentre $231 \not< 431825976$. Quando $\sigma \leq \tau$, un'*occorrenza* di σ in τ é una stringa contenuta in τ isomorfa a σ. Ad esempio, 431825976 contiene 2 occorrenze di $\sigma = 321$, che sono le stringhe 431 e 976.

   Supponiamo che $\sigma \leq \tau$, e che ci siano esattamente 2 occorrenze di σ in τ, una all'estremitá sinistra e una all'estremitá destra (l'esempio precedente mostra proprio questa situazione). Calcolare $\mu(\sigma, \tau)$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.