Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2017/2018)

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando il suo nucleo, cioé l'insieme dei blocchi costituiti dalle controimmagini di ogni elemento dell'immagine, é dotato di un ordine totale. In base a tale definizione, le funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando i nuclei degli ordini totali $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, $g^{-1}(b) < g^{-1}(a)$ sono da considerarsi differenti. Determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite da N a X dei seguenti tipi: funzioni arricchite generiche, funzioni arricchite suriettive, funzioni arricchite iniettive.

2. (a) Indichiamo con $f(n)$ il numero di modi di scegliere un sottoinsieme $S \subseteq [n] = \{1, 2, \dots n\}$ e una permutazione π di lunghezza n tale che, per ogni $i \in S$, si ha che $\pi(i) \notin S$. Trovare un'espressione per $f(n)$.

   (b) Indichiamo con $g(n)$ la quantitá di cui sopra, in cui la permutazione π é un ciclo di lunghezza n. Trovare un'espressione per $g(n)$.

3. Dato $S = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n\}$, indichiamo con $\mathfrak{S}_n$ l'insieme delle permutazioni di S. Due permutazioni $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ vengono dette *equivalenti* quando σ si puó ottenere a partire da τ mediante uno o piú scambi di elementi adiacenti della forma $a_i b_i$ o $b_i a_i$. Ad esempio, la permutazione $a_3 a_1 b_1 b_3 b_2 a_2$ di $\mathfrak{S}_3$ é equivalente alle permutazioni $a_3 b_1 a_1 b_3 b_2 a_2$, $a_3 a_1 b_1 b_3 a_2 b_2$ e $a_3 b_1 a_1 b_3 a_2 b_2$. Determinare il numero di classi di equivalenza di $\mathfrak{S}_n$.

4. Sia I un ideale di un reticolo L e sia $a \in L$. Dimostrare che l'insieme $\downarrow \{a \vee c \mid c \in I\}$ é un ideale di L ed é il piú piccolo ideale di L contenente I e a.

5. Siano P, Q due insiemi parzialmente ordinati con minimo e massimo. La *somma orizzontale* di P e Q é, per definizione, l'insieme parzialmente ordinato ottenuto dall'unione disgiunta di P e Q identificando i minimi e i massimi dei due insiemi parzialmente ordinati. La *somma verticale* di P e Q é, per definizione, l'insieme parzialmente ordinato ottenuto dall'unione disgiunta di P e Q identificando il massimo di P con il minimo di Q (si noti che in tal modo, in particolare, per ogni $x \in P$ e $y \in Q$, x é minore di y nella somma verticale di P e Q).

   Si considerino due contesti (G_1, M_1, I_1) e (G_2, M_2, I_2) tali che $G_1 \cap G_2 = M_1 \cap M_2 = \emptyset$ e $G_1' = M_1' = G_2' = M_2' = \emptyset$. Siano $L_1 =$

$\mathfrak{B}(G_1, M_1, I_1)$ e $L_2 = \mathfrak{B}(G_2, M_2, I_2)$ i reticoli di concetti associati. Dimostrare i seguenti fatti:

(a) $\mathfrak{B}(G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, I_1 \cup I_2)$ é isomorfo alla somma orizzontale di L_1 e L_2;

(b) $\mathfrak{B}(G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, I_1 \cup I_2 \cup (G_1 \times M_2))$ é isomorfo alla somma verticale di L_1 e L_2;

(c) $\mathfrak{B}(G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, I_1 \cup I_2 \cup (G_1 \times M_2) \cup (G_2 \times M_1))$ é isomorfo al prodotto diretto di L_1 e L_2.

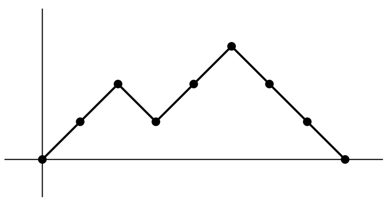
6. Sia B un'algebra di Boole e siano $a, b \in B$, con $a \leq b$. Dimostrare che l'intervallo $[a, b] = \{x \in B \mid a \leq x \leq b\}$ é un'algebra di Boole. In quali casi $[a, b]$ é anche una sottoalgebra di Boole di B?

7. Sia P un insieme parzialmente ordinato e siano $X = \{\downarrow x \mid x \in P\}$ e $Y = \{\uparrow x \mid x \in P\}$ ordinati per inclusione. Si definiscano $\varphi : X \to Y$ ponendo $\varphi(\downarrow x) = \uparrow x$ e $\psi : Y \to X$ ponendo $\psi(\uparrow x) = \downarrow x$. Dimostrare che la coppia (φ, ψ) é un connessione di Galois tra X e Y^∂.

8. Sia L un reticolo finito, e sia $f_m(0) = |\{(t_1, \ldots, t_m) \in L^m \mid t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots t_m = 0\}$. Dimostrare che

$$f_m(0) = \sum_{t \in L} \mu(0, t) \cdot |\uparrow t|^m.$$

9. Un *cammino di Dyck* é un cammino nel piano discreto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ che parte dall'origine di un fissato sistema di rifermiento cartesiano, termina sull'asse delle x, non scende mai al di sotto dell'asse delle x e utilizza i seguenti due tipi di passi: $U = (1, 1)$ e $D = (1, -1)$. La *lunghezza* di un cammino di Dyck é il numero dei suoi passi. Qui sotto viene riportato un esempio di cammino di Dyck.



Un cammino di Dyck si puó rappresentare in modo equivalente come parola w sull'alfabeto binario $\{U, D\}$ che soddisfa le seguenti proprietá: ogni prefisso di w contiene almeno tante lettere U quante lettere D; il numero totale di lettere U in w é uguale al numero totale di lettere D.

Definiamo sull'insieme $\mathcal{D}$ di tutti i cammini di Dyck il seguente ordine parziale: dati due cammini di Dyck w e w', poniamo $w \leq w'$ quando esiste una sottoparola (non necessariamente consecutiva) di w' uguale a w.

(a) Sia P un cammino di Dyck avente un solo picco, vale a dire $P = U^k D^k$ per un certo $k > 0$. Calcolare la funzione di Möbius dell'intervallo $[UD, P]$.

(b) Sia P un cammino di Dyck con esattamente due picchi, vale a dire $P = U^\alpha D^\beta U^\gamma D^\delta$ per certi $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Supponiamo che almeno uno fra i valori $|\alpha - \beta|$, $|\beta - \gamma|$ e $|\gamma - \delta|$ sia > 1. Si consideri il cammino $Q \in [UD, P]$ ottenuto da P togliendo il minor numero di passi possibile avente la proprietá che $|\alpha - \beta|, |\beta - \gamma|, |\gamma - \delta| \leq 1$.

- Dimostrare che ogni cammino $Z \in [UD, P]$ avente la proprietá di cui sopra é $\leq Q$.
- Dimostrare che, per ogni $Z \in [UD, P]$ tale che $Z \nleq Q$, si ha $\mu(UD, Z) = 0$.
- Concludere che $\mu(UD, P) = 0$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.