

Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2015/2016)

1. I numeri di Lah $L_{n,k}$ sono definiti come segue:

$$L_{n,k} = (-1)^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \quad (n, k \geq 0).$$

Dimostrare che:

$$(-x)_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k} (x)_k.$$

Dedurre la seguente *formula di inversione di Lah*: per ogni coppia di successioni $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}, (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, si ha che, per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$v_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k} u_k \Leftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k} v_k.$$

2. Una *copertura* di un insieme finito X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di X la cui unione è tutto X . Ad esempio, le partizioni insiemistiche sono particolari casi di coperture. Sia c_n il numero di coperture di un insieme di cardinalità n . Dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{n-k} = 2^{2^n - 1}.$$

Dalle precedente relazione dedurre poi la seguente forma chiusa per c_n :

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{2^k - 1}.$$

3. Quante soluzioni intere possiede l'equazione

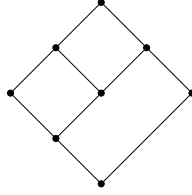
$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n,$$

con le condizioni $0 \leq x_i \leq l$, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$?

4. Siano A e B insiemi discendenti dell'insieme parzialmente ordinato P . Dimostrare che A è coperto da B in $(\mathcal{O}(P), \subseteq)$ se e solo se $B = A \cup \{b\}$ per qualche elemento minimale $b \in P \setminus A$.
5. Si consideri l'insieme $S = \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid i < j\}$. Definiamo su S il seguente ordine parziale:

$$(i, j) \leq (i', j') \text{ quando } j \leq i' \text{ oppure } (i = i' \text{ e } j \leq j').$$

- (i) Disegnare la parte inferiore del diagramma di Hasse di $(S, \leq)$.
 - (ii) Dimostrare che S é un reticolo; dimostrare inoltre che S possiede la seguente propriet : per ogni $n \geq 3$, e per ogni $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, esistono due indici $i, j \leq n$ (non necessariamente distinti) tali che $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = a_i \wedge a_j$.
6. Sia L il reticolo descritto nella figura sotto:



Descrivere un contesto (G, M, I) , con $G = \{A, B, C, D\}$ e $M = \{s, t, u, v\}$, tale che L risulti isomorfo al reticolo di concetti $\mathfrak{B}(G, M, I)$.

7. Sia P un pre-CPO, e siano $A_i \subseteq P$, con $i \in I$. Si supponga che, per ogni $i \in I$, A_i sia un sottoinsieme diretto di P e che $\{A_i\}_{i \in I}$ sia una famiglia diretta di sottoinsiemi di P . Dimostrare che sia $\bigcup_{i \in I} A_i$ che $\{\bigsqcup A_i\}_{i \in I}$ sono sottoinsiemi diretti di P , e che

$$\bigsqcup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} \left(\bigsqcup A_i \right).$$

8. *Teorema di Hall.* Sia L un reticolo finito, e sia $\mathcal{A}(L)$ l'insieme dei suoi atomi. Dimostrare che, per ogni $x \in L$,

$$\mu(0, x) = \sum_{A \in Y(x)} (-1)^{|A|},$$

ove $Y(x) = \{A \subseteq \mathcal{A}(L) \mid x = \bigvee A\}$.

9. Sia S l'insieme di tutte le permutazioni. Per ogni $\pi \in S$, indichiamo con $|\pi|$ la lunghezza della permutazione π . Definiamo il seguente ordine parziale su S : date $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$, $\tau = \tau_1, \dots, \tau_n \in S$, con $|\sigma| \leq |\tau|$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando ci sono $k = |\sigma|$ elementi $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_2+1}, \dots, \tau_{i_2+k-2}$ in τ (con $i_1 < i_2$) tali che la stringa $\tau_{i_1} \tau_{i_2} \tau_{i_2+1} \dots \tau_{i_2+k-2}$ é "isomorfa" alla permutazione σ , nel senso che gli elementi di tale stringa sono nello stesso ordine relativo degli elementi di σ . Si osservi che, a parte eventualmente l'elemento τ_{i_1} , tutti gli altri elementi della stringa devono apparire consecutivamente in τ . Ad esempio, $321 < 431825976$ perché la stringa 431 contenuta in 431825976 é isomorfa a 321 (in

questo caso tutti gli elementi della stringa 431 appaiono consecutivamente nella permutazione piú lunga, il che naturalmente implica che siano consecutivi gli ultimi 2); inoltre, si ha anche $231 < 432516$, in quanto la stringa 351 é isomorfa a 231 e gli elementi 5 e 1 sono consecutivi (anche se 3 e 5 non lo sono); infine, $123 \not\leq 432516$, dato che non ci sono stringhe di lunghezza 3 nella permutazione piú lunga che siano isomorfe a 123 (cioé crescenti) e tali che il secondo e il terzo elemento appaiano consecutivamente. Quando $\sigma \leq \tau$, un'occorrenza di σ in τ é una stringa contenuta in τ isomorfa a σ . Ad esempio, 431825976 contiene 3 occorrenze di 321, che sono 431, 876 e 976, e una sola occorrenza di 312, che é 825.

Date due permutazioni $\sigma, \tau = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, supponiamo che $\sigma \leq \tau$, e che ci sia esattamente una occorrenza di σ in τ (l'esempio precedente mostra proprio questa situazione nel caso $\sigma = 312$). Calcolare $\mu(\sigma, \tau)$ nei seguenti casi:

- (a) l'unica occorrenza di σ in τ contiene τ_1 ma non contiene τ_2 e τ_n ;
- (b) l'unica occorrenza di σ in τ contiene τ_2 ma non contiene τ_1 e τ_n ;
- (c) l'unica occorrenza di σ in τ é fatta di elementi non consecutivi di τ e non contiene τ_1, τ_2 e τ_n .

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esercizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova può ritenersi superata.