***Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2014/2015)***

1. Sia $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un arbitrario polinomio di grado $n$ a coefficienti complessi. Dimostrare che
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p_n(k) = (-1)^n n! a_n.$$
Da tale risultato dedurre poi la seguente formula:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} (-1)^k = (-1)^n.$$

2. (a) Sia $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$ una permutazione di $S_n$. Si chiama *inversione* di $\pi$ ogni coppia $(a_i, a_j)$, con $i < j$, tale che $a_i > a_j$. Sia $I_{n,k}$ il numero di permutazioni di $S_n$ con $k$ inversioni. Dimostrare che, per $k < n$, vale la seguente ricorrenza:
$$I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}.$$
(b) Sia $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$ una permutazione di $S_n$. Si chiama *ascesa* di $\pi$ ogni $i < n$ tale che $a_i < a_{i+1}$. Sia $A_{n,k}$ il numero di permutazioni di $S_n$ con $k$ ascese. Dimostrare che, per $0 < k \leq n$, vale la seguente ricorrenza:
$$A_{n,k} = (n-k) A_{n-1,k-1} + (k+1) A_{n-1,k}.$$

3. Dimostrare che il numero di partizioni intere di $n$ in cui non compare alcuna parte multipla di 3 é uguale al numero di partizioni intere di $n$ in cui ogni parte compare al piú 2 volte. Enunciare e dimostrare una opportuna generalizzazione di tale risultato.

4. Sia $P$ un insieme parzialmente ordinato non vuoto. Un sottoinsieme finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ di $P$ si dice *fence* quando $x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < x_5 > \cdots x_n$ oppure $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 < \cdots x_n$.

   (i) Sia $Q$ un sottoinsieme di $P$ che sia simultaneamente un insieme ascendente e un insieme discendente; siano $x, y \in P$, con $x \neq y$, e si supponga che $x \in Q$. Si supponga inoltre che esista una fence che collega $x$ e $y$ (vale a dire, con riferimento alla definizione data sopra, una fence tale che $x_1 = x$ e $x_n = y$). Dimostrare che $y \in Q$.

   (ii) Indichiamo con $\mathcal{O}(P)$ l'insieme degli insiemi discendenti di $P$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) i soli insiemi ascendenti in $\mathcal{O}(P)$ sono $\emptyset$ e $P$;

(b) $P$ non é l'unione disgiunta di due insiemi parzialmente ordinati non vuoti $P_1$ e $P_2$.

(c) $P$ é *connesso*, vale a dire per ogni $x, y \in P$, esiste una fence che collega $x$ e $y$.

5. Un sottoinsieme $A$ di $\mathbf{N}$ (insieme dei numeri naturali) si dice *cofinito* quando il suo complementare $\mathbf{N} \setminus A$ é finito. Sia $\mathcal{L}_1$ la famiglia dei sottoinsiemi cofiniti di $\mathbf{N}$ e sia $\mathcal{L}_2$ la famiglia dei sottoinsiemi finiti e cofiniti di $\mathbf{N}$. Dimostrare che $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono entrambi reticoli, ma non reticoli completi.

6. Si consideri il contesto $(G, M, I)$ descritto nella seguente tabella:

| | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | × | | | × | × | | | × |
| B | × | × | | | | | × | × |
| C | × | | × | | | × | | × |
| D | × | × | × | × | | | | |
| E | × | × | | | × | × | | |
| F | × | | × | | × | | × | |

Determinare tutti i concetti di tale contesto e disegnare il diagramma di Hasse del reticolo di concetti associato $L$, indicando anche le etichette corrispondenti alle mappe $\gamma$ e $\mu$.

7. Sia $P$ un insieme parzialmente ordinato e $Q$ un reticolo completo. Si indichi con $(P \to Q)$ l'insieme parzialmente ordinato delle funzioni da $P$ a $Q$ con l'ordine puntuale (cioé $f \leq g$ quando $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in P$). Si indichi inoltre con $\langle P \to Q \rangle$ il sottoinsieme parzialmente ordinato di $(P \to Q)$ costituito dalle funzioni crescenti. Data una funzione $f \in (P \to Q)$, si definisca la funzione $\overline{f} \in (P \to Q)$ ponendo:

$$\overline{f}(x) = \bigvee \{f(y) \mid y \leq x\}.$$

Dimostrare che $\overline{f}$ é crescente e che $f = \overline{f}$ se e solo se $f$ é crescente. Dimostrare inoltre che la funzione $F : (P \to Q) \to \langle P \to Q \rangle$ definita ponendo $F(f) = \overline{f}$ é una funzione crescente.

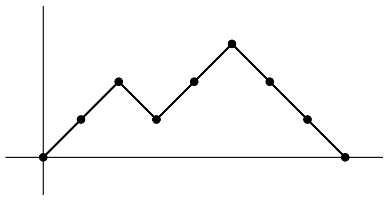
8. Sia $P$ un insieme parzialmente ordinato finito, e si ponga $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, in modo tale che, se $x_i < x_j$, allora $i < j$. Sia $f : P \to P$ una qualunque funzione. Si definisca $g : P \times P \to P$ come segue:

$$g(x_i, x_j) = \sum_{z \geq x_i, x_j} f(z).$$

Si consideri la matrice $G = (g(x_i, x_j))_{1 \le i,j \le n}$. Si dimostri che

$$\det G = \prod_{x \in P} f(x) \qquad \left( = \prod_{1 \le i \le n} f(x_i) \right).$$

9. Un *cammino di Dyck* é un cammino nel piano discreto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ che parte dall'origine di un fissato sistema di rifermiento cartesiano, termina sull'asse delle $x$, non scende mai al di sotto dell'asse delle $x$ e utilizza i seguenti due tipi di passi: $U = (1, 1)$ e $D = (1, -1)$. La *lunghezza* di un cammino di Dyck é il numero dei suoi passi. Qui sotto viene riportato un esempio di cammino di Dyck.



Un cammino di Dyck si puó rappresentare in modo equivalente come parola $w$ sull'alfabeto binario $\{U, D\}$ che soddisfa le seguenti proprietá: ogni prefisso di $w$ contiene almeno tante lettere $U$ quante lettere $D$; il numero totale di lettere $U$ in $w$ é uguale al numero totale di lettere $D$.

Definiamo sull'insieme $\mathcal{D}$ di tutti i cammini di Dyck il seguente ordine parziale: dati due cammini di Dyck $w$ e $w'$, poniamo $w \le w'$ quando esiste una sottoparola (fatta di lettere non necessariamente consecutive) di $w'$ uguale a $w$.

Per ogni $k \in \mathbf{N}$, si ponga $w_k = U^k D^k$ (cioé $w_k$ é il cammino di Dyck composto da $k$ passi $U$ seguiti da $k$ passi $D$). Dato un cammino di Dyck $w$, si dimostri che

$$\sum_k \mu(w_k, w) = 0$$

(ove la somma é estesa a tutti gli indici $k$ tali che $w_k \le w$).

*Nota.* Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.