Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2013/2014)

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando la controimmagine di ogni elemento $x \in X$, $f^{-1}(x)$, é dotata di una struttura di ciclo. In base a tale definizione, le due funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando le controimmagini degli elementi del codominio delle strutture di ciclo $f^{-1}(a) = g^{-1}(a) = (1, 2)$, $f^{-1}(b) = (3, 4, 5)$, $g^{-1}(b) = (3, 5, 4)$ sono da considerarsi differenti. Determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite da N a X dei seguenti tipi: funzioni arricchite generiche, funzioni arricchite suriettive, funzioni arricchite iniettive.

2. (a) Una *composizione* di un numero naturale n é una partizione ordinata di n, vale a dire una partizione intera di n le cui parti sono totalmente ordinate. Ad esempio, le composizioni di 4 sono $4, 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1$. Determinare una ricorrenza e una forma chiusa per il numero di composizioni di n.

   (b) Una 2-composizione di n é una matrice di numeri interi nonnegativi avente 2 righe (e m colonne, per qualche numero naturale m), priva di colonne contenenti solo 0 e tale che la somma di tutte le sue entrate é uguale a n. Ad esempio, le 2-composizioni di 2 sono le seguenti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una ricorrenza e una forma chiusa per il numero di 2-composizioni di n.

3. Sia $f(m, n)$ il numero di matrici $m \times n$ a coefficienti in $\{0, 1\}$ aventi almeno un 1 in ogni riga e in ogni colonna. Trovare una formula per $f(m, n)$.

4. Sia P l'insieme di tutte le parole binarie finite (compresa la parola vuota ε). Si definisca la relazione binaria $\leq$ su P come segue: $u \leq v$ quando v é un prefisso di u oppure esistono tre parole x, y, z (ciascuna di esse eventualmente vuota) tali che $v = x0y$ e $u = x1z$. Dimostrare che $(P, \leq)$ é un insieme totalmente ordinato con massimo ma privo di minimo. (Si noti che, per dimostrare che $(P, \leq)$ é totalmente ordinato, occorre tra l'altro dimostrare che é parzialmente ordinato). Si disegnino i diagrammi di Hasse dell'ordine indotto sull'insieme delle parole

di lunghezza minore di 3 e dell'ordine indotto sull'insieme delle parole di lunghezza minore di 4.

5. Sia L un reticolo.

   (a) Sia $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ una catena di ideali di L. Dimostrare che la loro unione $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n$ é un ideale di L.

   (b) Diciamo che un insieme parzialmente ordinato P soddisfa la *condizione della catena ascendente* quando, per ogni successione $(x_n)_n$ di elementi di P tale che $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$, esiste $k \in \mathbf{N}$ tale che $x_k = x_{k+1} = \cdots = x_n = \cdots$ (cioé tutti gli elementi della successione sono uguali da x_k in poi). Dimostrare che ogni ideale (di reticolo) di L é principale se e solo se L soddisfa la condizione della catena ascendente.

6. Siano G ed M insiemi finiti.

   (a) Si supponga che $(G, \leq)$ e $(M, \leq)$ siano insiemi totalmente ordinati e che $I \subseteq G \times M$ sia un insieme discendente del prodotto diretto $G \times M$ d tali catene. Dimostrare che il reticolo di concetti $\mathcal{B}(G, M, I)$ é una catena.

   (b) Si supponga che (G, M, I) sia un contesto il cui reticolo di concetti associato $\mathcal{B}(G, M, I)$ é una catena. Dimostrare che G ed M possono essere totalmente ordinati in modo tale che I risulti un insieme discendente del prodotto diretto $G \times M$.

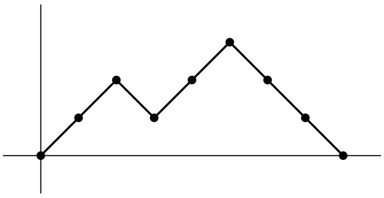
   (Suggerimento: scegliere su G ed M ordini totali tali che $\gamma : G \to \mathcal{B}(G, M, I)$ sia crescente e $\mu : M \to \mathcal{B}(G, M, I)$ sia decrescente).

7. Dato un insieme S, si indichi con S_0 l'insieme parzialmente ordinato avente insieme sostegno $S \cup \{0\}$, tale che 0 é il minimo e su S c'é l'ordine discreto. Come é noto, S_0 é un CPO (insieme parzialmente ordinato completo). Siano $\varphi, \psi : S_0 \to S_0$ funzioni crescenti e tali che $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Si indichi con $[S_0 \to S_0]$ l'insieme parzialmente ordinato delle funzioni continue da S_0 a S_0 con l'ordine puntuale. Dimostrare che la funzione $F : [S_0 \to S_0] \to [S_0 \to S_0]$ definita ponendo $F(f) = \psi \circ f \circ \varphi$ per ogni $f \in [S_0 \to S_0]$ é ben definita (vale a dire $F(f)$ é una funzione continua) ed é crescente.

8. *Teorema di Weisner.* Sia L un reticolo finito e sia μ la sua funzione di Möbius. Si fissi $a > 0$ in L. Dimostrare che:

$$\sum_{\substack{x \in L \\ x \vee a = 1}} \mu(0, x) = 0.$$

9. Un *cammino di Dyck* é un cammino nel piano discreto $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ che parte dall'origine di un fissato sistema di rifermiento cartesiano, termina sull'asse delle x, non scende mai al di sotto dell'asse delle x e utilizza i seguenti due tipi di passi: $U = (1,1)$ e $D = (1,-1)$. La *lunghezza* di un cammino di Dyck é il numero dei suoi passi. Qui sotto viene riportato un esempio di cammino di Dyck.

   Un cammino di Dyck si puó rappresentare in modo equivalente come parola w sull'alfabeto binario $\{U, D\}$ che soddisfa le seguenti proprietá: ogni prefisso di w contiene almeno tante lettere U quante lettere D; il numero totale di lettere U in w é uguale al numero totale di lettere D.

   Definiamo sull'insieme $\mathcal{D}$ di tutti i cammini di Dyck il seguente ordine parziale: dati due cammini di Dyck w e w', poniamo $w \leq w'$ quando esiste una sottoparola di w' uguale a w.

   Nell'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{D}, \leq)$, per un fissato $n \in \mathbf{N}$, si consideri l'intervallo $[(UD)^{n-1}, (UD)^{n+1}]$. Si calcoli la funzione di Möbius di tale intervallo.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.