Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete" (a.a. 2012/2013)

1. Siano N e X due insiemi totalmente ordinati finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Si ricorda che una *funzione crescente* fra 2 insiemi parzialmente ordinati é una funzione che conserva l'ordine, vale a dire una funzione f tale che, se $x \leq y$ nel dominio, allora $f(x) \leq f(y)$ nel codominio. Determinare una forma chiusa per il numero di funzioni crescenti, funzioni crescenti iniettive e funzioni crescenti suriettive da N a X.

2. a) Dato un insieme totalmente ordinato L, un *intervallo* di L é un sottoinsieme I di L tale che, $\forall x \leq y \leq z \in L$, se $x, z \in I$, allora $y \in I$. Una *partizione lineare* di L é una partizione di L in intervalli. Determinare una forma chiusa per il numero $f_{n,k}$ delle partizioni lineari in k intervalli di un insieme totalmente ordinato L di cardinalitá n, e per il numero f_n di tutte le partizioni lineari di un insieme totalmente ordinato L di cardinalitá n.

   b) Una *partizione 2-filtrante* di un insieme totalmente ordinato L é una partizione lineare di L in cui ogni intervallo ha cardinalitá al piú 2. Determinare una forma chiusa per il numero g_n delle partizioni 2-filtranti di un insieme totalmente ordinato L di cardinalitá n.

3. Quante sono le permutazioni di lunghezza n prive di cicli di lunghezza k? (Suggerimento: usare il principio di inclusione-esclusione).

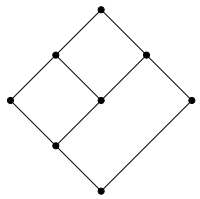
4. Si indichi con $\mathcal{O}(P)$ l'insieme degli insiemi discendenti di P con l'ordine parziale dato dal contenuto insiemistico $\subseteq$; si ponga poi $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con l'ordine naturale. Dimostrare che un sottoinsieme U di P é un insieme ascendente se e solo se la sua funzione caratteristica $\chi_U : P \to \mathbf{2}$ é crescente (per definizione $\chi_U(x) = 1$ quando $x \in U$ e $\chi_U(x) = 0$ quando $x \notin U$). Indicando poi con $\langle P \to \mathbf{2} \rangle$ l'insieme parzialmente ordinato delle funzioni crescenti da P a $\mathbf{2}$ con l'ordine puntuale, dimostrare che $\mathcal{O}(P) \cong \langle P \to \mathbf{2} \rangle^{\partial}$ ($\cong$ denota l'isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati e $^{\partial}$ indica il duale di un insieme parzialmente ordinato).

5. a) *Teorema di decomposizione di Banach.* Siano X e Y insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funzioni. Allora esistono una partizione $\{X_1, X_2\}$ di X e una partizione $\{Y_1, Y_2\}$ di Y tali che $f(X_1) = Y_1$ e $g(Y_2) = X_2$. (Suggerimento: utilizzare il teorema di punto fisso di Knaster-Tarski con la funzione $F : \wp(X) \to \wp(X)$ definita ponendo $F(S) = X \setminus g(Y \setminus f(S))$, per ogni $S \subseteq X$).

   b) *Teorema di Schröder-Bernstein.* Siano X e Y insiemi, e si supponga che esistano due funzioni iniettive $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$.

Allora esiste una funzione biiettiva $h : X \to Y$. (Suggerimento: utilizzare il teorema di decomposizione di Banach).

6. Sia L il reticolo descritto nella figura sotto:



Descrivere un contesto (G, M, I), con $G = \{A, B, C, D\}$ e $M = \{s, t, u, v\}$, tale che L risulti isomorfo al reticolo di concetti $\mathfrak{B}(G, M, I)$.

7. In quali dei seguenti casi D é un sottoinsieme diretto dell'insieme parzialmente ordinato P?

   (i) $P = \wp(\mathbf{N})$, $D = \{X \subseteq \mathbf{N} \mid (\forall m \in \mathbf{N}) 2m \in X\}$.

   (ii) $P = \wp(\mathbf{N})$, $D = \{X \subseteq \mathbf{N} \mid \mathbf{N} \setminus X$ é finito $\}$.

   (iii) $P = (\mathbf{N} \multimap \mathbf{N})$, $D = \{\pi \in P \mid \pi(n) \leq 2$ per ogni $n \in Dom(\pi)\}$.

   (iv) $P = \mathbf{N}_0^2$, $D = \{(0, n) \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{(n, 0) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

   (v) $P = (\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0)$, $D = \{f_i\}_{i \geq 1}$, ove $f_i : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ é definita ponendo $f_i(i) = 1$, $f_i(j) = 0$, per $j \neq i$.

   (vi) (*facoltativo*) $P = (\mathbf{N}, |)$, $D = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbf{N}$ e $a + b$ é primo $\}$.

   (Note per la comprensione del testo: $\mathbf{N}$: insieme dei numeri naturali zero escluso; $\mathbf{N}_0$: insieme dei numeri naturali zero incluso; $\wp(\mathbf{N})$: insieme delle parti di $\mathbf{N}$; $(\mathbf{N} \multimap \mathbf{N})$: insieme parzialmente ordinato delle funzioni parziali da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{N}$ con l'ordine consueto; $(\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0)$: insieme parzialmente ordinato delle funzioni totali da $\mathbf{N}_0$ a $\mathbf{N}_0$ con l'ordine puntuale).

8. *Teorema di Crapo.* Sia P un insieme parzialmente ordinato localmente finito, e sia c un operatore di chiusura su P. Indichiamo poi con $c(P)$ l'insieme parzialmente ordinato dei chiusi di P. (Si ricordi che, per definizione, $c(P) = \{x \in P \mid x = c(x)\}$). Dimostrare che, per ogni $s, t \in P$, si ha

$$\sum_{\substack{u \in P \\ c(u) = c(t)}} \mu(s, u) = \begin{cases} \mu_{c(P)}(c(s), c(t)), & \text{se } s = c(s) \\ 0, & \text{se } s < c(s) \end{cases},$$

ove $\mu_{c(P)}$ denota la funzione di Möbius dell'insieme parzialmente ordinato $c(P)$ con l'ordine indotto da P.

9. Sia S l'insieme di tutte le permutazioni. Per ogni $\pi \in S$, indichiamo con $|\pi|$ la lunghezza della permutazione π. Definiamo il seguente ordine parziale su S: date $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $\tau = \tau_1, \cdots \tau_n \in S$, con $|\sigma| \leq |\tau|$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando ci sono $k = |\sigma|$ elementi consecutivi $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_{i+k}$ in τ tali che la stringa $\tau_{i+1}\tau_{i+2} \cdots \tau_{i+k}$ é "isomorfa" alla permutazione σ, nel senso che, per ogni $l < m$, $\tau_{i+l} < \tau_{i+m}$ se e solo se $\sigma_l < \sigma_m$. Ad esempio, $321 < 431825976$ perché la stringa 431 contenuta in 431825976 é isomorfa a 321, mentre $231 \not< 431825976$. Quando $\sigma \leq \tau$, un'*occorrenza* di σ in τ é una stringa contenuta in τ isomorfa a σ. Ad esempio, 431825976 contiene 2 occorrenze di σ, che sono le stringhe 431 e 976.

   Supponiamo che $\sigma \leq \tau$, e che ci siano esattamente 2 occorrenze di σ in τ, una all'estremitá sinistra e una all'estremitá destra (l'esempio precedente mostra proprio questa situazione). Calcolare $\mu(\sigma, \tau)$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.