Esercizi per l'esame di "Strutture Discrete"

1. Siano N e X due insiemi finiti di cardinalitá rispettivamente $|N| = n$ e $|X| = x$. Diciamo che $f : N \to X$ é una *funzione arricchita* quando la controimmagine di ogni elemento $x \in X$, $f^{-1}(x)$, é dotata di un ordine totale. In base a tale definizione, le due funzioni $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definite ponendo $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = g(3) = g(4) = g(5) = b$ e dotando le controimmagini degli elementi del codominio degli ordini totali $f^{-1}(a) = g^{-1}(a) = \{1 < 2\}$, $f^{-1}(b) = \{3 < 4 < 5\}$, $g^{-1}(b) = \{4 < 5 < 3\}$ sono da considerarsi differenti. Supponiamo ora che gli elementi di N siano distinguibili, mentre quelli di X siano indistingubili. In questa ipotesi, determinare una forma chiusa per il numero di funzioni arricchite, funzioni arricchite iniettive e funzioni arricchite suriettive da N a X.

2. Sia S_n l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \ldots n\}$ e sia $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$. Una permutazione $\pi \in S$ scritta come prodotto di cicli si dice *in forma standard* quando in ogni ciclo il primo elemento é il massimo del ciclo e i cicli sono elencati in ordine crescente dei loro massimi. Ad esempio, la permutazione (31)(526)(847) non é in forma standard, mentre la permutazione (31)(652)(847) é in forma standard (si osservi che si tratta della stessa permutazione). Ovviamente, ogni permutazione si puó rappresentare in uno e in un solo modo in forma standard. Si chiama *trasformazione fondamentale* la funzione $\varphi : S \to S$ che manda la permutazione π scritta come prodotto di cicli in forma standard nella permutazione $\varphi(\pi)$ ottenuta semplicemente togliendo le parentesi (e leggendo ció che rimane come una permutazione scritta in forma lineare). Ad esempio, $\varphi((43)(512)) = 43512$. Si determini un'espressione per il numero di punti fissi della trasformazione fondamentale φ.

3. Chiamiamo un numero *apparentemente primo* se é composto ma non é divisibile per 2,3 e 5. Quanti sono i numeri apparentemente primi minori di 1000?

4. In quali dei seguenti casi la funzione $\varphi : P \to Q$ conserva l'ordine?

   (i) $P = Q = (\mathbf{Z}, \leq)$ e $\varphi(x) = x + 1$.

   (ii) $P = (\wp(S), \subseteq)$, con $|S| > 1$, $Q = \mathbf{2}$ e $\varphi(U) = 1$ se $U \neq \emptyset$ e $\varphi(\emptyset) = 0$.

   (iii) $P = (\wp(S), \subseteq)$, con $|S| > 1$, $Q = \mathbf{2}$ e $\varphi(U) = 0$ se $U \neq S$ e $\varphi(S) = 1$.

   (iv) $P = Q = (\mathbf{N}_0, |)$ e $\varphi(x) = nx$ (con $n \in \mathbf{N}_0$ fissato).

(v) $P = (\wp(S), \subseteq)$, $Q = \mathbf{2}$ e $\varphi(U) = 1$ se $x \in U$ e $\varphi(U) = 0$ altrimenti (con $x \in S$ fissato).

(vi) $P = Q = (\wp(\mathbf{N}), \subseteq)$ e φ definita come segue:

$$\varphi(U) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } 1 \in U, \\ \{2\} & \text{se } 2 \in U \text{ e } 1 \notin U, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(Notazioni: $\mathbf{N}$: insieme dei numeri naturali (senza lo zero); $\mathbf{N}_0$: insieme dei numeri naturali (con lo zero); $\mathbf{Z}$: insieme dei numeri interi; $\wp(S)$: insieme delle parti di S; $\mathbf{2}$: poset con insieme sostegno $\{0, 1\}$ dotato dell'ordine naturale $(0 < 1)$).

5. Sia L un reticolo. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (i) L é una catena;

   (ii) ogni sottoinsieme non vuoto di L é un sottoreticolo di L;

   (iii) ogni sottoinsieme di L di cardinalitá 2 é un sottoreticolo di L.

6. Si consideri il contesto descritto nella seguente tabella:

	s	t	u	v	w
A		×	×		
B	×			×	
C		×		×	×
D		×	×	×	×

   Determinare tutti i concetti di tale contesto. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo di concetti associato L, indicando anche le etichette corrispondenti alle mappe γ e μ.

7. Sia $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$ una relazione tra gli insiemi A e B e si definiscano le funzioni $F_{\mathfrak{R}} : \wp(A) \to \wp(B)$ e $G_{\mathfrak{R}} : \wp(B) \to \wp(A)$ come segue:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{R}}(S) &:= \{b \in B \mid (\exists a \in S)(a, b) \in \mathfrak{R}\}, \\ G_{\mathfrak{R}}(T) &:= \{a \in A \mid (\forall b \in B)((a, b) \in \mathfrak{R} \Rightarrow b \in T)\}, \end{aligned}$$

   per ogni $S \subseteq A$ e $T \subseteq B$. Si dimostri che $(F_{\mathfrak{R}}, G_{\mathfrak{R}})$ é una connessione di Galois tra $\wp(A)$ e $\wp(B)$.

   Viceversa, sia (F, G) una connessione di Galois tra $\wp(A)$ e $\wp(B)$ e si definisca una relazione $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$ ponendo

$$\mathfrak{R} := \{(a, b) \in A \times B \mid b \in F(\{a\})\}.$$

   Si dimostri che $(F, G) = (F_{\mathfrak{R}}, G_{\mathfrak{R}})$.

8. Dato un insieme parzialmente ordinato P, si consideri l'insieme parzialmente ordinato $\hat{P}$ ottenuto da P aggiungendo un nuovo minimo $\hat{0}$ e un nuovo massimo $\hat{1}$. Chiamiamo *numero di Möbius* di P la quantitá $\mu(P) = \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1})$. Nell'ipotesi che esista $a \in P$ confrontabile con tutti gli elementi di P, si dimostri che $\mu(P) = 0$.

9. Sia S l'insieme di tutte le permutazioni. Per ogni $\pi \in S$, indichiamo con $|\pi|$ la lunghezza della permutazione π. Definiamo il seguente ordine parziale su S: date $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $\tau = \tau_1, \cdots \tau_n \in S$, con $|\sigma| \leq |\tau|$, poniamo $\sigma \leq \tau$ quando ci sono $k = |\sigma|$ elementi consecutivi $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_{i+k}$ in τ tali che la stringa $\tau_{i+1}\tau_{i+2} \cdots \tau_{i+k}$ é "isomorfa" alla permutazione σ, nel senso che, per ogni $l < m$, $\tau_{i+l} < \tau_{i+m}$ se e solo se $\sigma_l < \sigma_m$. Ad esempio, $321 < 431825976$ perché la stringa 431 contenuta in 431825976 é isomorfa a 321, mentre $213 \not< 431825976$. Quando $\sigma \leq \tau$, un'*occorrenza* di σ in τ é una stringa contenuta in τ isomorfa a σ. Ad esempio, 431825976 contiene 2 occorrenze di 321, che sono le stringhe 431 e 976, e una sola occorrenza di 312, che é la stringa 825.

   Supponiamo che $\sigma \leq \tau$, e che ci sia esattamente una occorrenza di σ in τ (l'esempio precedente mostra proprio questa situazione nel caso $\sigma = 312$). Calcolare $\mu(\sigma, \tau)$.

Nota. Per superare la prova non é strettamente necessario risolvere tutti gli esercizi proposti (anche se naturalmente sarebbe preferibile!). La cosa fondamentale é provare *seriamente* a farli tutti. Nel caso di esecizi non risolti, prima dell'orale verificheró se c'é stato effettivamente un impegno da parte vostra (per esempio, se avete tentato un approccio che si é rivelato infruttuoso), o se invece i vostri tentativi si sono ridotti a poco piú di una semplice lettura del testo. Nel caso in cui effettivamente l'impegno sia evidente, la prova puó ritenersi superata.