Intégration et Probabilités

TD 4 : Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

Dans tous les exercices, $\boldsymbol{\lambda_d}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{\delta_a}$ la masse de Dirac en $\boldsymbol{a}$.

Exercice 1 Soit $a \in]0, +\infty[$. Préciser les valeurs de $p \in]0, +\infty]$ pour lesquelles la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \big(x\big(1+\ln^2 x\big)\big)^{-1/a}\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \end{array}$$

est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$.

Exercice 2 Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Considérons la fonction $f : [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{-1} & \text{si } (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \text{ et } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Préciser les valeurs de $p \in]0, +\infty]$ pour lesquelles f_1 est de puissance $p^{\text{ème}}$-intégrable sur $[-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 3 (Transformation de Hardy) Soient $p \in]1, +\infty[$, $f \in L^p(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda_1)$ et

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\lambda_1(dt)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous souhaitons montrer que

$$(*) \quad \|T(f)\|_p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_p.$$

1. Montrer que $T(f) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et est borélienne.
2. Supposons f continue positive et à support compact. Posons $F = T(f)$. En intégrant par parties puis en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\|F\|_p^p = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)\lambda_1(dx)$$

   En déduire que $\|F\|_p^p \leq \dfrac{p}{p-1}\|F\|_p^{p-1}\|f\|_p$. Vérifier ensuite que (*) est satisfaite.
3. Étudier le cas où f est continue à support compact.
4. Étudier le cas où $f \in L^p(]0, +\infty[)$.

Exercice 4 On effectue n parties de pile ou face. Déterminer n à l'aide de l'inégalité de Bienaimé-Tchebichef pour que l'on puisse affirmer que la fréquence d'apparition de pile, dans l'ensemble des n parties, soit comprise entre 0.45 et 0.55, avec une probabilité au moins égale à 0.90.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^3}\mathbf{1}_{x>0}.$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Montrer que $X > 0$ presque sûrement.
3. La variable aléatoire X appartient-elle à L^∞ ?
4. Déterminer les réels $p \geq 1$ tels que $X \in L^p$. Calculer, si elle existe, la variance de X.
5. Posons $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Déterminer les valeurs de $p \in [1, +\infty]$ pour lesquelles $Y \in L^p$.
6. Posons $Z = 1/X$. Déterminer les valeurs de $p \in [1, +\infty]$ pour lesquelles $Z \in L^p$.

Exercice 6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

On suppose que

$$0 < \|f\|_{p_0} < +\infty$$

pour un certain $p_0 \in [1, +\infty[$.

1. (a) Montrer que pour tous $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ et tout $\theta \in [0, 1]$,

$$\int_\Omega |f|^{(1-\theta)p_1+\theta p_2} d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu\right)^{1-\theta} \left(\int_\Omega |f|^{p_2} d\mu\right)^{\theta}.$$

   (b) En déduire que l'ensemble

$$J = \left\{p \in [1, +\infty[\ / \ \|f\|_p < +\infty\right\}$$

   est un intervalle non vide (éventuellement réduit à un point).
2. Soit $p \in [1, +\infty[$ tel que $p \geq p_0$.
   (a) Montrer que pour tout $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|_p \geqslant M(\mu(|f| \geqslant M))^{1/p}.$$

   (b) Montrer que $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_{p_0}^{p_0} \ \|f\|_\infty^{p-p_0}$.
3. Déduire des questions précédentes que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 7 Soient $\Omega = \mathbb{R}_+$ et $\mu(dx) = e^{-x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\lambda_1(dx)$.

1. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^p$.
2. En considérant la fonction identité, montrer que

$$\bigcap_{p\in[1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^\infty.$$

3. Construire un exemple $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ d'espace de probabilité tel que $\bigcup_{1<p} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^1$.