

Intégration et Probabilités

TD 1 : Espaces mesurés et fonctions mesurables

Exercice 1 Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\{]-\infty, a[/ a \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 2 Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω .

1. On suppose que $\mathcal{F}_1$ (respectivement $\mathcal{F}_2$) est engendrée par $\mathcal{C}_1$ (respectivement par $\mathcal{C}_2$). On introduit :

$$\mathcal{D}_1 = \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \mathcal{F}_1, \text{ et } A_2 \in \mathcal{F}_2\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \mathcal{F}_1, \text{ et } A_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

Montrer que $\sigma(\mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2) = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.

2. $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-elle une tribu sur Ω ?

Exercice 3 Soit $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) / A = -A\}$ où $-A = \{-x / x \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.
2. Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ces applications sont-elles $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mesurables ?

Exercice 4

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Considérons

$$f : (A, \mathcal{B}(A)) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \text{ et } g : (A^c, \mathcal{B}(A^c)) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

deux fonctions boréliennes. Nous définissons la fonction h sur $\mathbb{R}^n$ par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Montrer que $h : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est borélienne.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que h est borélienne.

Exercice 5 Démontrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \sin(x) > x^3\}$ est un borélien.

Exercice 6 Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $f_A : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$, $f_A : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable.

Exercice 7 Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 8 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable et $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ une fonction mesurable. Définissons μ_X sur $\mathcal{A}'$ par

$$\forall B \in \mathcal{A}', \mu_X(B) = \mu(X^{-1}(B)).$$

1. Montrer que $\mathcal{T} = \{X^{-1}(B) / B \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu sur Ω .
2. Montrer que μ_X est une mesure positive sur $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Remarque : μ_X est appelée **mesure image de μ par X** .

3. Déterminer μ_X pour $X = a$, $a \in \Omega'$.

Exercice 9 On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu boorélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \delta_n,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac en a .

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_p = \left[p, p + 1 + \frac{1}{p^2} \right] \quad \text{et} \quad C_p = [p, +\infty[.$$

1. Calculer $\mu(A_p)$ et $\mu(C_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$. Vérifier que $\mu(C) \neq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_k)$. Commenter.
3. Déterminer la mesure image de μ par

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \omega^2. \end{aligned}$$

Exercice 10

1. Soit μ l'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Montrer que μ est une mesure positive sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2. Soit ν l'application à valeurs dans $[0, +\infty]$ et définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$\nu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} & \text{si } A \text{ est un ensemble fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que ν est additive mais n'est pas σ -additive.