

Prova di recupero relativa ai capitoli 1–3

Esercizio 1 Dimostrare che, se f è una funzione sufficientemente regolare in un punto x assegnato, allora

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2).$$

Esercizio 2 Spiegare in modo esauriente il fenomeno della *cancellazione numerica*.

Esercizio 3 Definire esaurientemente cosa sia la precisione di macchina di una aritmetica finita, e cosa essa misuri.

Esercizio 4 Definire l'ordine di convergenza di un metodo iterativo per la ricerca degli zeri di una funzione; dimostrare che il metodo di Newton converge quadraticamente ad una radice semplice.

Esercizio 5 Definire cosa si intende per *soluzione* di un sistema lineare di equazioni, e sotto quali condizioni questa esista e sia unica. Spiegare, altresì, cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema sovra-determinato di equazioni, e sotto quali condizioni essa esista e sia unica.

Esercizio 6 Scrivere una function Matlab che risolva efficientemente un sistema lineare di equazioni triangolare superiore.

Esercizio 7 Dimostrare che, se A è una matrice nonsingolare fattorizzabile LU , la sua fattorizzazione è unica.

Esercizio 8 Sotto quali ipotesi esiste la fattorizzazione LU di una matrice nonsingolare? Dimostrare che una matrice a diagonale dominante è fattorizzabile LU .

Esercizio 9 Spiegare esaurientemente in che modo la fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m > n = \text{rank}(A)$, sia utilizzabile per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nel senso dei minimi quadrati.

Prova di recupero relativa ai capitoli 4–6

Esercizio 1 Definire il polinomio interpolante una funzione e dimostrare che esso esiste ed è unico.

Esercizio 2 Definire la forma di Newton del polinomio interpolante.

Esercizio 3 Come si definisce il polinomio interpolante di Hermite?

Esercizio 4 Dato il polinomio interpolante sulle ascisse $x_0 < x_1 \cdots < x_n$, derivare la corrispondente espressione dell'errore di interpolazione.

Esercizio 5 Come sono definite le ascisse di Chebyshev, ed a cosa servono, nell'ambito dell'interpolazione polinomiale?

Esercizio 6 Definire una spline di grado m su una partizione assegnata. Quante condizioni sono necessarie, e perché, per individuarne una in modo univoco?

Esercizio 7 Derivare le formule di quadratura di Newton-Cotes, e calcolare la formula di grado 3.

Esercizio 8 Definire i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.

Esercizio 9 Dimostrare che, risolvendo il sistema lineare $Ax = b$ con un metodo iterativo, e detti rispettivamente $r_k = Ax_k - b$ ed $e_k = x_k - x^* \equiv x_k - A^{-1}b$ il residuo e l'errore all'iterazione k -esima, allora

$$\|r_k\| \leq tol \cdot \|b\| \quad \Rightarrow \quad \|e_k\| \leq tol \cdot \kappa(A) \|x^*\|,$$

essendo $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ il numero di condizione di A .
