Prima prova di recupero relativa ai capitoli 1–3

Esercizio 1 Dimostrare che, se f è una funzione sufficientemente regolare in un punto x assegnato, allora $[f(x+h)-f(x-h)]/(2h) = f'(x) + O(h^2)$.

Esercizio 2 Siano: $a = \pi + 10^{-15}$ e $b = \pi - 10^{-15}$. Risulta, pertanto, che:

$$a/b \approx 1 + 2/\pi \cdot 10^{-15} \approx 1 + 0.63662 \cdot 10^{-15}, \qquad a - b = 2 \cdot 10^{-15}.$$

In Matlab, definendo le variabili `a=pi+1e-15, b=pi-1e-15`, il risultato delle seguenti operazioni è:

```
(a/b) - (1+2/pi*1e-15)   ⟶   0
(a-b) - 2e-15            ⟶   -2.2364e-16
```

Dare una stima dell'errore relativo commesso nei due casi, e spiegare il perché dei risultati ottenuti.

Esercizio 3 Definire cosa misura la precisione di macchina di un'aritmetica finita. Quanto vale la precisione di macchina della *doppia precisione IEEE*?

Esercizio 4 Quanto vale la molteplicità della radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \sin(x)$?

Esercizio 5 Derivare il metodo di accelerazione di Aitken per la ricerca di zeri di funzione.

Esercizio 6 Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice triangolare superiore U ed un vettore $\boldsymbol{b}$, calcoli efficientemente la soluzione del sistema lineare $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Esercizio 7 Dimostrare che, se A è una matrice nonsingolare fattorizzabile LU, la sua fattorizzazione è unica.

Esercizio 8 Dimostrare che una matrice simmetrica e definita positiva è fattorizzabile LU.

Esercizio 9 Scrivere la fattorizzazione QR per il vettore $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3, & 4, & 0 \end{pmatrix}^\top$ (ovvero, determinare Q ed R tali che $QR = \boldsymbol{a}$).

Esercizio 1 $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + O(h^4)$ (1)

$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + O(h^4)$ (2)

Sottraendo (2) da (1) e dividendo per $2h$ si ottiene la tesi.

Esercizio 2 Nel primo caso, l'errore relativo è ϕ. Nel secondo caso vale circa $\frac{2 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 10^{-15}} = 0.1$. Questo perché il numero di condizionamento della somma vale 1, nel primo caso, e $\approx \pi \cdot 10^{15}$ nel secondo caso (cancellazione numerica)

Esercizio 3 La precisione di macchina di un'aritmetica finita maggiora l'errore relativo di rappresentazione, per i numeri di macchina normalizzati. La doppia precisione IEEE vale $2^{-53} \approx 10^{-16}$.

Esercizio 4

$f(x) = x^2 \sin(x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 2\sin(x) + 4x \cdot \cos(x) - x^2 \sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6\cos(x) - 6x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x) \Rightarrow f'''(0) = 6$

$\Rightarrow$ la radice ha molteplicità 3.

Esercizio 5 Quando il metodo di Newton converge ad una radice multipla, lo fa linearmente. Pertanto, se x_{n+1} e x_{n+2} sono ottenute applicando il metodo di Newton a partire da x_n, e detto $e_n = x_n - x^*$ l'errore (analogamente e_{n+1} e e_{n+2}) con x^* la radice, si avrà $e_{n+1} \approx c \cdot e_n$ e $e_{n+2} \approx c \cdot e_{n+1}$, con c la costante dell'errore. Dividendo membro a membro si ottiene, quindi, $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx \frac{e_{n+1}}{e_n} \Rightarrow e_{n+2} e_n \approx e_{n+1}^2$, ovvero $(x_{n+2} - x^*)(x_n - x^*) \approx (x_{n+1} - x^*)^2 \Rightarrow x_{n+2} x_n - x^*(x_{n+2} + x_n) \approx x_{n+1}^2 - 2x^* x_{n+1}$. Ricavando x^*, si ottiene la nuova approssimazione, $x^*_n = \frac{x_{n+2} x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$, da cui si riparte con due passi del metodo di Newton.

Esercizio 6

```
function x = Usolve(U, b)
% commenti appropriati
[m,n] = size(U); if m~=n || n~=length(b), error('dati errati'), end
x = b(:);
for i = n:-1:1
    if U(i,i)==0, error('matrice singolare'); end
    x(i) = x(i)/U(i,i); x(1:i-1) = x(1:i-1) - x(i)*U(1:i-1,i);
end
return
```

Esercizio 8 A è fattorizzabile LU se tutte le sue sottomatrici principali sono nonsingolari. Se A è sdp dimostriamo: a) che è nonsingolare; b) che tutte le sue sottomatrici principali sono sdp. Questo dà la tesi.

Ricordiamo che A è sdp se: $A = A^T$ e $\forall \underline{x} \neq \underline{0} : \underline{x}^T A \underline{x} > 0$.

a) se fosse A singolare $\Rightarrow \exists \underline{x} \neq \underline{0} : A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = 0$, assurdo.

b) Sia $A = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, con $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ $(A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ n \geq k)$. Dalla simmetria di A discende che $A_k = A_k^T$, $B^T = C$, $D = D^T$. Rimane da dim. che $\forall \underline{y} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{y} \neq \underline{0} : \underline{y}^T A_k \underline{y} > 0$. Definisco $\underline{x} = \binom{\underline{y}}{\underline{0}} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{x} \neq \underline{0} \Rightarrow 0 < \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{y}^T A_k \underline{y}$, da cui l'asserto.

Esercizio 9 Se $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\underline{a}\|_2 = 5 \Rightarrow$ il vettore di Householder corrispondente è $\underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = I - \frac{2}{\underline{v}^T \underline{v}} \underline{v}\underline{v}^T = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e tale che $H\underline{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv R$, mentre $Q = H^T = H$.