Esercizio 1

$$c_{02} = c_{22} = \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right)\Big|_{t=2} = \frac{1}{3}$$

$$c_{02} + c_{22} + c_{12} = 2 \Rightarrow c_{12} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos 0 + 4\cos \pi/2 + \cos \pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}(1-1) = 0.$$

Il numero di condizionamento della formula discreta coincide con quello dell'integrale, essendo i pesi positivi, ed è uguale all'ampiezza dell'intervallo di integrazione, π.

Esercizio 2

```
function   I = trape (fun, a, b, tol, fa, fb)
%
% I = trape (fun, a, b, tol)   calcola l'integrale di fun(x) da a a b con la
%                              formula dei trapezi adattiva e tolleranza tol.
%
if nargin == 4
   fa = feval(fun, a); fb = feval(fun, b);
end
I1 = (b-a)*(fa+fb)/2 ;
x = (a+b)/2 ;
fx = feval(fun, x);
I = (I1 + (b-a)*fx)/ 2;
err = abs(I-I1)/3;
if err > tol,   I = trape(fun, a, x, tol/2, fa, fx) + ...
                    trape(fun, x, b, tol/2, fx, fb);

end
return
```

Esercizio 3

Il metodo delle potenze è applicabile a matrici che abbiano un autovalore semplice dominante. Ovvero, se questo è λ_1, allora per ogni altro autovalore λ deve aversi $|\lambda| < |\lambda_1|$. Nello specifico, se la matrice A fosse > 0, questo sarebbe garantito dal teorema di Perron-Frobenius. Pertanto dovrà aversi:

$$\left.\begin{array}{l} 2-\alpha > 0 \\ \alpha - 1 > 0 \\ 3\alpha - 1 > 0 \\ \alpha/3 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow 1 < \alpha < 2.$$

Esercizio 4 Sia $A = M - N$ con M nonsingolare e $M^{-1}, N \geq 0$. In tal caso, lo splitting $M-N$ si dice regolare. L'importanza di questi splitting deriva dal fatto che il metodo iterativo

$$M x_{k+1} = N x_k + b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, risulta essere convergente (ovvero $\rho(M^{-1}N) < 1$), se $A^{-1} \geq 0$ e lo splitting è regolare.

Esercizio 5 La matrice A può essere scritta come

$$A = \frac{6}{\alpha} I - \beta B, \quad \text{con} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A è una M-matrice se $\frac{6}{\alpha} > \beta \cdot \rho(B)$. Poiché $B \geq 0$, osserviamo che, definito $\underline{e} = (1,1,1)^T$, $B\underline{e} = 3\underline{e}$, pertanto 3 è autovalore di A. Inoltre, $\|B\|_\infty = 3$. Segue che $\rho(B) = 3$. Pertanto, dovrà aversi $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e, inoltre,

$$\frac{6}{\alpha} > 3\beta, \quad \text{ovvero} \quad 2 > \alpha\beta.$$

Esercizio 6 x = Jaco (A, b, tol, xϕ)

```
function x = Jaco(A,b,tol,[xϕ])   <commenti>   xϕ default 0
% x = Jaco(A,b,tol,[xϕ])
%
if nargin == 3, x = zeros(size(b)); else, x=xϕ; end
D = diag(A); maxit = length(x)*max(1,-log(tol))*100; % o qualcos'altro
for i=1:maxit
    r = b-A*x;
    ~~if nor~~ err = norm(r,inf);
    if err <= tol, break, end
    x = x + D.\r;
end
if err>tol, warning('tolleranza non raggiunta'); end
return-
```