Seconda Prova di recupero sui capitoli 4–6

Esercizio 1 Calcolare la forma di Lagrange e quella di Newton, del polinomio interpolante le coppie di dati (ascissa,ordinata):

$$(0,0),(1,1),(2,3),(3,5).$$

Esercizio 2 Derivare l'espressione della costante di Lebesgue, e spiegarne il significato nell'ambito dell'interpolazione polinomiale.

Esercizio 3 Calcolare l'espressione delle ascisse di Chebyshev per costruire il polinomio interpolante di grado 5 sull'intervallo [0,10]. Spiegare perché queste ascisse sono importanti, nell'ambito dell'interpolazione polinomiale.

Esercizio 4 Definire la spline cubica "not-a-knot" interpolante la funzione $e^{2x} - \sin x$ sulla partizione $\Delta = \{0, 1, 4, 5, 8, 10\}$.

Esercizio 5. Scrivere una function Matlab che implementi efficientemente la formula adattativa dei trapezi.

Esercizio 6. Spiegare esaurientemente perché è possibile applicare il metodo delle potenze per determinare l'autovalore dominante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Dare la definizione di *splitting regolare* di una matrice e dire perché essi sono importanti.

Esercizio 8. Scrivere una function Matlab che implementi efficientemente il metodo iterativo di Jacobi.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. La tabella delle differenze è:

	0	1	2	3
0	0			
1	1	1		
2	3	2	1/2	
3	5	2	0	-1/6

Pertanto, si ottiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x(x-1) - \frac{1}{6} \cdot x(x-1)(x-2) \\ &\equiv 1 \cdot L_{13}(x) + 3 \cdot L_{23}(x) + 5 \cdot L_{33}(x), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} L_{13}(x) &= \frac{1}{2}x(x-2)(x-3), \\ L_{23}(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3), \\ L_{33}(x) &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Esercizio 2. La costante di Lebesgue definisce il numero di condizionamento dell'interpolazione polinomiale. Infatti, considerando il polinomio interpolante di grado n la funzione $f(x)$, sia esso $p(x)$, e quello interpolante una funzione perturbata $\tilde{f}(x)$, sia esso $\tilde{p}(x)$, si avrà, utilizzando la forma di Lagrange e denotando $\tilde{f}_i = \tilde{f}(x_i), f_i = f(x_i), i = 0, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} |p(x) - \tilde{p}(x)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} L_{in}(x)(f_i - \tilde{f}_i) \right| \le \sum_{i=0}^{n} |L_{in}(x)|\, |f_i - \tilde{f}_i| \\ &\le \|f - \tilde{f}\| \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |L_{in}(x)|}_{=\lambda_n(x)}, \end{aligned}$$

dove $\lambda_n(x)$ è la funzione di Lebesgue. Passando alle norme, si ottiene

$$\|p - \tilde{p}\| \le \|f - \tilde{f}\| \|\lambda_n\| \equiv \|f - \tilde{f}\| \Lambda_n,$$

dove Λ_n è la costante di Lebesgue. L'affermazione iniziale discende, quindi, dal fatto che: $\|f-\tilde{f}\|$ misura l'errore sui dati del problema e $\|p-\tilde{p}\|$ misura l'errore propagato sul polinomio interpolante.

Esercizio 3. Le ascisse di Chebyshev per il polinomio di grado 5 sull'intervallo [0,10] sono:

$$x_i = 5 + 5\cos\Big(\frac{2i+1}{12}\pi\Big), \qquad i = 0,\ldots,5.$$

Considerando il polinomio interpolante di grado n la funzione $f(x)$, sia esso $p(x)$, e quello interpolante una funzione perturbata $\tilde{f}(x)$, sia esso $\tilde{p}(x)$, si ottiene, come visto innanzi,

$$\|p-\tilde{p}\| \le \Lambda_n \|f-\tilde{f}\|,$$

dove Λ_n è la costante di Lebesgue che, pertanto, misura il condizionamento del problema dell'interpolazione polinomiale. È noto che Λ_n cresce almeno come $\log n$ e, spesso, assai più rapidamente (come, ad esempio, utilizzando le ascisse equidistanti). Le ascisse di Chebyshev sono importanti perché consentono di ottenere la crescita logaritmica della costante di Lebesgue.

Esercizio 4. La spline cubica richiesta, sia essa $s_3(x)$, dovrà soddisfare le seguenti condizioni, che la determinano univocamente:

$$s_3(x)|_{[0,4]} \in \Pi_3, \qquad s_3(x)|_{[4,5]} \in \Pi_3, \qquad s_3(x)|_{[5,10]} \in \Pi_3;$$

$$s_3(x) \in C^{(2)}[0,10];$$

$$s_3(x) = e^{2x} - \sin x, \qquad \forall x \in \Delta.$$

Esercizio 5.

```
function I2 = adaptrap( a, b, f, tol, fa, fb )
%
% I2 = adaptrap( a, b, f, tol )  Calcola l'integrale
%                               definito di f(x) da a a b
%                               con tolleranza tol.
%
x1 = (a+b)/2;
```

```
f1 = feval( f, x1 );
if nargin<=4
   fa = feval( f, a );
   fb = feval( f, b );
end
h  = (b-a)/2;
I1 = h*( fa+fb );
I2 = .5*h*( fa + 2*f1 +fb );
e  = abs( I2-I1 )/3;
if e>tol
   I2 = adaptrap( a, x1, f, tol/2, fa, f1 ) + ...
        adaptrap( x1, b, f, tol/2, f1, fb );
end
return
```

Esercizio 6. Evidentememte, si ha $-A > 0$. Pertanto a questa matrice si applica il Teorema di Perron-Frobenius, che garantisce l'esistenza di un autovalore dominante, λ_1, semplice:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|,$$

che permette l'applicazione del metodo delle potenze, avendosi $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. La tesi si completa osservando che gli autovalori di A sono gli opposti di quelli di $-A$.

Esercizio 7. Sia data una matrice nonsingolare A. La decomposizione $A = M - N$, con $\det(M) \neq 0$, definisce uno *splitting* di A. Lo splitting si dice *regolare* se, in aggiunta, $M^{-1}, N \geq 0$. L'importanza di uno splitting regolare deriva dal fatto che, considerato il metodo iterativo

$$Mx_{x+1} = Nx_k + b, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, esso sarà *convergente* (alla soluzione del problema), se e solo se $\rho(M^{-1}N) < 1$, essendo ρ il raggio spettrale della matrice in argomento. Questo è garantito nel caso di uno splitting regolare di una matrice A *monotona*, ovvero tale che $A^{-1} \geq 0$.

Esercizio 8.

```
function x = Jacobi( A, b, tol, x0 )
%
% x = Jacobi( A, b, tol [, x0] )  Risolve il
%                                 sistema lineare Ax = b
%                                 con il metodo di Jacobi
% con tolleranza tol e vettore iniziale x0 (default posto a 0).
%
n = length(b);
if nargin<=3
   x = zeros(n,1);
else
   x = x0;
end
D = diag(A);
maxit = 10 + max(1,-ceil(log(tol)))*n;
err = inf;
for i = 1:maxit
    r   = Ax-b;
    err = norm(r,inf)
    if err<=tol, break, end
    r   = r./D;
    x   = x-r;
end
if err>tol, warning('tolleranza richiesta non raggiunta'), end
return
```