Prova di recupero sui capitoli 4–6

Esercizio 1 Calcolare la forma di Lagrange e quella di Newton, del polinomio interpolante le coppie di dati (ascissa,ordinata):

$$(-0.5, 1), \quad (0, 2), \quad (0.5, 2), \quad (1, 0), \quad (2, 0).$$

Esercizio 2 Spiegare perché le ascisse di interpolazione di Chebyshev sono importanti nell'interpolazione polinomiale.

Esercizio 3 Calcolare l'espressione del polinomio interpolante di Hermite relativo ai seguenti dati nella forma (x_i, f_i, f_i'):

$$(-1, 1, 1), \quad (3, 2, 1).$$

Scrivere l'espressione dell'errore di interpolazione, supponendo che $f(x)$ sia sufficientemente regolare.

Esercizio 4 Dare la definizione di una spline cubica su una partizione $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi\}$ assegnata. Quali sono le condizioni da imporre per determinare la spline cubica *periodica* interpolante la funzione $f(x) = \sin(x)$ sui nodi della partizione Δ?

Esercizio 5. Scrivere una function Matlab che implementi efficientemente la formula adattativa di Simpson.

Esercizio 6. Enunciare il teorema di Perron-Frobenius, sia nella sua forma forte che in quella debole.

Esercizio 7. Dare la definizione di *splitting regolare* di una matrice e dire perché essi sono importanti.

Esercizio 8. Scrivere una function Matlab che implementi efficientemente il metodo iterativo di Gauss-Seidel.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. La tabella delle differenze è:

	0	1	2	3	4
-0.5	1				
0	2	2			
0.5	2	0	-2		
1	0	-4	-4	-4/3	
2	0	0	8/3	10/3	28/15

Pertanto, si ottiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 2(x + 0.5) - 2x(x + 0.5) - (4/3)x(x^2 - 0.25) \\ &\quad +(28/15)x(x - 1)(x^2 - 0.25) \\ &\equiv L_{04}(x) + 2L_{14}(x) + 2L_{24}(x), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} L_{04}(x) &= (8/15)x(x - 0.5)(x - 1)(x - 2), \\ L_{14}(x) &= -2(x^2 - 0.25)(x - 1)(x - 2), \\ L_{24}(x) &= (8/3)x(x + 0.5)(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Considerando il polinomio interpolante di grado n la funzione $f(x)$, sia esso $p(x)$, e quello interpolante una funzione perturbata $\tilde{f}(f)$, sia esso $\tilde{p}(x)$, si ottiene

$$\|p - \tilde{p}\| \le \Lambda_n \|f - \tilde{f}\|,$$

dove Λ_n è la costante di Lebesgue che, pertanto, misura il condizionamento del problema dell'interpolazione polinomiale. È noto che Λ_n cresce almeno come $\log n$ e, spesso, assai più rapidamente (come, ad esempio, utilizzando le ascisse equidistanti). Le ascisse di Chebyshev sono importanti perché consentono di ottenere la crescita logaritmica della costante di Lebesgue.

Esercizio 3. La tabella delle differenze è:

	0	1	2	3
-1	1			
-1	1	1		
3	2	1/4	-3/16	
3	2	1	3/16	3/32

Pertanto, si ottiene:

$$p(x) = 1 + (x+1) - (3/16)(x+1)^2 + (3/32)(x+1)^2(x-3).$$

L'errore di interpolazione è:

$$e(x) \equiv f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x+1)^2(x-3)^2, \quad \xi_x \in [\min(-1,x), \max(3,x)].$$

Esercizio 4. Una spline cubica sulla partizione Δ assegnata è una funzione polinomiale a tratti, sia essa $s_3(x)$, tale che:

$$s_3|_{[x_{i-1},x_i]}(x) \in \Pi_3, \qquad s_3(x) \in C^{(2)}[0, 2\pi].$$

La spline cubica interpolante la funzione $\sin(x)$ sulla partizione Δ è univocamente individuata dalle $(n+3)$ condizioni:

$$s_3(x_i) = \sin(x_i), \quad i = 0, \ldots, n, \qquad s_3^{(i)}(0) = s_3^{(i)}(2\pi), \quad i = 1, 2.$$

Esercizio 5.

```
function I2 = adapsim( a, b, f, tol, fa, f1, fb )
%
% I2 = adapsim( a, b, f, tol )  Calcola l'integrale
%                               definito di f(x) da a a b
%                               con tolleranza tol.
%
x1 = (a+b)/2;
if nargin<=4
   fa = feval( f, a );
   fb = feval( f, b );
   f1 = feval( f, x1 );
end
h  = (b-a)/6;
x2 = (a+x1)/2;
x3 = (x1+b)/2;
f2 = feval( f, x2 );
f3 = feval( f, x3 );
```

```
I1 = h*( fa+4*f1+fb );
I2 = .5*h*( fa + 4*f2 + 2*f1 + 4*f3 +fb );
e  = abs( I2-I1 )/15;
if e>tol
   I2 = adapsim( a, x1, f, tol/2, fa, f2, f1 ) + ...
        adapsim( x1, b, f, tol/2, f1, f3, fb );
end
return
```

Esercizio 6.
Teorema di Perron-Frobenius. Sia $A \in \mathrm{R}^{n\times n}, A > 0$. Allora $\exists\lambda_0 > 0, v_0 \in \mathrm{R}^n, v_0 > 0$ tali che:

$$Av_0 = \lambda_0 v_0, \qquad \forall\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < \lambda_0,$$

e, inoltre, λ_0 è un autovalore semplice.

Teorema di Perron-Frobenius (forma debole). Sia $A \in \mathrm{R}^{n\times n}, A \geq 0$. Allora $\exists\lambda_0 \geq 0, v_0 \in \mathrm{R}^n, v_0 \geq 0$ tali che:

$$Av_0 = \lambda_0 v_0, \qquad \forall\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \leq \lambda_0.$$

Esercizio 7. Sia data una matrice nonsingolare A. La decomposizione $A = M - N$, con $\det(M) \neq 0$, definisce uno *splitting* di A. Lo splitting si dice *regolare* se, in aggiunta, $M^{-1}, N \geq 0$. L'importanza di uno splitting regolare deriva dal fatto che, considerato il metodo iterativo

$$Mx_{x+1} = Nx_k + b, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, esso sarà *convergente* (alla soluzione del problema), se e solo se $\rho(M^{-1}N) < 1$, essendo ρ il raggio spettrale della matrice in argomento. Questo è garantito nel caso di uno splitting regolare di una matrice A *monotona*, ovvero tale che $A^{-1} \geq 0$.

Esercizio 8.

```
function x = GaussSeidel( A, b, tol, x0 )
%
% x = GaussSeidel( A, b, tol [, x0] )  Risolve il
```

```
%                                sistema lineare Ax = b
%                                con il metodo di Gauss-Seidel
% con tolleranza tol e vettore iniziale x0 (default posto a 0).
%
n = length(b);
if nargin<=3
   x = zeros(n,1);
else
   x = x0;
end
maxit = 10 + max(1,-ceil(log(tol)))*n;
err = inf;
for i = 1:maxit
    r   = Ax-b;
    err = norm(r,inf)
    if err<=tol, break, end
    r   = trisolve(A,r);
    x   = x-r;
end
if err>tol, warning('tolleranza richiesta non raggiunta'), end
return


function x = trixolve(L,b)
%
%  risolve il sistema triangolare inferiore Lx = b.
%
n = length(b);
x = b;
for i = 1:n
    x(i)     = x(i)/L(i,i);
    x(i+1:n) = x(i+1:n) -x(i)*L(i+1:n,i);
end
return
```