Intermedio di Calcolo Numerico. Prima parte.
A.A. 15/16: 8 Giugno 2016

Esercizio 1. Analizzare il condizionamento del prodotto.

Esercizio 2. Un'aritmetica finita usa la base 10, l'arrotondamento e lo shift $\nu = 50$ e riserva 4 cifre per la mantissa (più una per il segno) e 2 cifre per la caratteristica. Eseguire l'operazione di macchina $S_m = x_1 \oplus x_2$, con $x_1 = 325.47$ e $x_2 = 19.714$ e valutare l'errore relativo con cui S_m approssima $S = x_1 + x_2$.

Esercizio 3. Verificare che $[0\,,\,\pi/3]$ è un intervallo di confidenza per la funzione $f(x) = \tan(x - \pi/4)$ e calcolare il numero massimo di iterazioni da eseguire del metodo di bisezione per essere certi che l'errore diventi minore di 10^{-5}. Eseguire quindi il primo passo del metodo.

Esercizio 4. Calcolare la molteplicità dello zero $\hat{x} = 3$ della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. Eseguire quindi un passo del metodo di Newton modificato partendo da $x_0 = 2$.

Esercizio 5. Definire l'ordine di convergenza e la costante asintotica di un metodo iterativo. Analizzare quindi l'affidabilità del criterio di arresto dell'incremento.

Esercizio 6. Dare la definizione di matrice sdp e dimostrare che una tale matrice è sicuramente fattorizzabile LU. Esiste una fattorizzazione più conveniente da usare in questo caso?

Esercizio 7. Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Utilizzando la norma infinito e indicando con $\mathbf{x}$ la soluzione esatta del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, calcolare una maggiorazione a priori (usare il condizionamento del problema) di $\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$, sapendo che $\tilde{\mathbf{x}}$ è la soluzione di $A\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8. Definire le matrici elementari di Householder e dimostrare che esse sono simmetriche e ortogonali. Dimostrare quindi che, se Q è una matrice ortogonale, $\|Q\mathbf{w}\|_2 = \|\mathbf{w}\|_2$.