

# Capitolo 1

## Sistemi dinamici

In questo breve capitolo introduttivo si descrivono le tematiche fondamentali che saranno sviluppate durante il corso.

Molti fenomeni studiati nelle applicazioni sono di tipo *evolutivo*, ovvero sono descritti da un processo dinamico che evolve nel tempo.

Questo tipo di fenomeni sono spesso modellizzati matematicamente mediante un *problema ai valori iniziali* per equazioni *differenziali*, se il tempo assume valori continui, o alle *differenze*, se il tempo assume valori discreti.

Senza perdere in generalità, possiamo formalizzare questi due tipi di problemi, rispettivamente, come:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{assegnato}, \quad (1.2)$$

e

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{assegnato}. \quad (1.4)$$

Per semplicità espositiva, supporremo che la soluzione sia definita per ogni scelta della *condizione iniziale*  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  (nel caso generale potrebbe essere ristretta ad un opportuno dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ), e per ogni  $t \geq 0$  o  $n \geq 0$  (diversamente, potrebbe aversi  $t \in [0, T]$  e  $n \in \{0, \dots, N\}$ , rispettivamente).

La soluzione  $y(t)$  del problema (1.1)-(1.2) descrive una *traiettoria continua*, soluzione del problema stesso. Similmente, la soluzione  $\{y_n\}$  del problema (1.3)-(1.4) descrive una *traiettoria discreta*.

Associata alla equazione (1.1) è la *mappa continua* (denominata anche *flusso*)

$$\phi_t(y_0) = y(t), \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

che genera la soluzione di (1.1)-(1.2). Essa definisce il *sistema dinamico (continuo)* associato alla equazione (1.1). Similmente, associata alla equazione (1.3) è la *mappa discreta*

$$\phi_n(y_0) = y_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

che genera la soluzione di (1.3)-(1.4). Essa definisce il *sistema dinamico (discreto)* associato alla equazione (1.3).

Come nei corsi di base di Analisi Numerica si era interessati allo studio del condizionamento di un problema, ovvero, di quanto variasse la sua soluzione al variare dei dati di ingresso, in questa sede siamo interessati a studiare il comportamento delle *traiettorie soluzione*, al variare della condizione iniziale  $y_0$ . Questo studio è infatti essenziale, al fine di ottenere una corretta simulazione dei fenomeni. In particolare, di grande importanza, nello studio dei sistemi dinamici, sono i suoi *insiemi (o strutture) di equilibrio* (o *insiemi critici*). Diremo che  $P \subset \mathbb{R}^m$  è un *insieme (o struttura) di equilibrio* se

$$\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(P) = P,$$

nel caso continuo, ovvero

$$\bigcup_{n \geq 0} \phi_n(P) = P,$$

nel caso discreto, dove

$$\phi_t(P) = \bigcup_{y \in P} \phi_t(y), \quad \phi_n(P) = \bigcup_{y \in P} \phi_n(y).$$

Il più semplice esempio di insieme critico è un *punto di equilibrio*, ovvero un vettore  $\bar{y}$  tale che

$$f(t, \bar{y}) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

se trattiamo dell'equazione continua (1.1), ovvero tale che

$$\bar{y} = f(n, \bar{y}), \quad \forall n = 0, 1, \dots,$$

nel caso dell'equazione discreta (1.3). In entrambi i casi, ci si convince facilmente che, se la condizione iniziale è posta essere uguale a  $\bar{y}$ , allora la traiettoria (sia nel caso continuo, che nel caso discreto), rimane su  $\bar{y}$ .

Gli insiemi di equilibrio di un sistema dinamico sono molto importanti, specie nella simulazione dei fenomeni, perché se la dinamica è confinata ad essi, allora essa è (relativamente) facilmente prevedibile semplificando, in questo modo, il processo di inferenza sul fenomeno sottostante.

Tuttavia, questi insiemi di equilibrio hanno rilevanza fisica solo se piccole perturbazioni della dinamica permettono di rimanere in un loro opportuno intorno, ovvero di ritornare (almeno asintoticamente) sull'insieme critico. Siamo, cioè, interessati alle *proprietà di stabilità* delle strutture di equilibrio di un sistema dinamico. Queste proprietà di stabilità dovranno, nel caso di modelli continui, essere preservate dai sistemi dinamici discreti indotti dai corrispondenti *metodi numerici di approssimazione*.

Per questo motivo, durante il corso si daranno esempi di sistemi dinamici continui e discreti, nonché della corrispondenza qualitativa (prima che quantitativa) tra i sistemi dinamici discreti ottenuti dalla applicazione dei metodi numerici per approssimare opportuni sistemi dinamici continui: questi ultimi descritti da *equazioni differenziali*, mentre i primi descritti da corrispondenti *equazioni alle differenze*.

Cominceremo con l'analisi di casi semplici di equazioni alle differenze, per poi passare ad esaminare il caso di equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali, e/o alle differenze, più complesse.

## Capitolo 2

# Equazioni alle differenze: nozioni preliminari

*Questo capitolo contiene alcuni risultati di base relativi alle equazioni alle differenze del primo ordine (o a queste riconducibili). In particolare, si introducono gli operatori discreti fondamentali, studiandone le relative proprietà, ed i cosiddetti teoremi del confronto.*

Per introdurre le equazioni alle differenze, è necessario definire funzioni *discrete*, ovvero funzioni definite su un dominio discreto,

$$\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, \quad \text{con } x_n \in \mathbb{R} \text{ e } x_n < x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sia, dunque,  $f : \Omega \rightarrow V$ , con  $V$  uno spazio vettoriale (spesso, ma non sempre, si tratterà di  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^m$ , ovvero di  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{C}^m$ ). Useremo, ove opportuno, la notazione

$$f_n \equiv f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Alcuni esempi di domini sono:

- $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ , ovvero,  $x_n = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;
- se  $h > 0$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots\}$ , ovvero  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Andiamo, quindi, ad esaminare gli operatori di base per funzioni discrete.

### 2.1 Gli operatori $\Delta, E, I$

Definiamo, ora, gli operatori:

- *shift*  $E$ :  $Ef_n = f_{n+1}$ ;
- *identità*  $I$ :  $If_n = f_n$ ;
- *differenza (in avanti)*  $\Delta$ :  $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ .

Valgono le seguenti proprietà (la dimostrazione di quelle più ovvie è omessa per brevità):

**P1:** gli operatori  $\Delta, E, I$  sono lineari.

Infatti, se  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  sono le successioni definite da due funzioni e  $\alpha, \beta$  sono scalari, allora, ad esempio,

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha f_n + \beta g_n) &= (\alpha f_{n+1} + \beta g_{n+1}) - (\alpha f_n + \beta g_n) \\ &= \alpha(f_{n+1} - f_n) + \beta(g_{n+1} - g_n) = \alpha\Delta f_n + \beta\Delta g_n.\end{aligned}$$

Similmente per gli altri operatori;

**P2:**  $\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I;$

**P3:** commutatività degli operatori  $\Delta, E, I;$

**P4:** potenze degli operatori  $\Delta, E, I.$

Posto  $E^0 = \Delta^0 = I$ , si ha:

$$\Delta^k = \Delta \cdot \Delta^{k-1}, \quad E^k = E \cdot E^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

In particolare, si dimostra facilmente per induzione che

$$E^k f_n = f_{n+k}, \quad I^k = I, \quad k \geq 0,$$

mentre, a titolo di esempio, si ha

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta(f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n.$$

Più in generale, sfruttando le proprietà **P2** e **P3**, si ha:

$$\Delta^k f_n = (E - I)^k f_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E^i (-I)^{k-i} f_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f_{n+i}.$$

Ovvero:

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i. \quad (2.1)$$

Similmente, si ottiene:

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i. \quad (2.2)$$

Osserviamo che l'operatore  $\Delta$  assume, nel discreto, un ruolo simile a quello dell'operatore derivata nel continuo. Questa analogia è avvalorata dagli esempi illustrati nei seguenti esercizi.

**Esercizio 2.1** Siano  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con  $h > 0$  parametro fissato. Dimostrare che:

- $f \in C^{(2)}[x_n, x_{n+1}] \Rightarrow \frac{\Delta f_n}{h} = f'(x_n) + O(h);$
- $f \in C^{(4)}[x_n, x_{n+2}] \Rightarrow \frac{\Delta^2 f_n}{h^2} = f''(x_{n+1}) + O(h^2).$

**Esercizio 2.2** Siano  $\{z_n\}$  e  $\{y_n\}$  due successioni. Verificare che:

$$\begin{aligned}\Delta(z_n y_n) &= z_{n+1} \Delta y_n + (\Delta z_n) y_n \\ &= (\Delta z_n) y_{n+1} + z_n \Delta y_n \\ &= z_n \Delta y_n + (\Delta z_n) y_n + (\Delta z_n) (\Delta y_n).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Inoltre, se  $z_n \neq 0$ , per ogni  $n$ , allora:

$$\Delta \frac{y_n}{z_n} = \frac{z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n}{z_n z_{n+1}}.$$

Osserviamo che, assegnata  $\{y_n\}$ , si ha:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = y_N - y_{n_0} \equiv y_n \Big|_{n=n_0}^N.\tag{2.4}$$

In questo senso, se assimiliamo l'operatore  $\Delta$  all'operatore derivata nel continuo, dalla (2.4) segue che l'operatore di *sommatoria definita* è assimilabile all'operatore di *integrazione definita*. Osserviamo che la (2.4) può essere riscritta anche come:

$$y_N = y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n,\tag{2.5}$$

che risulta formalmente simile al teorema fondamentale del calcolo. Analogamente all'operatore continuo, dalla (2.3) segue la seguente *formula di sommazione per parti*:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} y_n \Delta z_n = (y_n z_n) \Big|_{n=n_0}^N - \sum_{n=n_0}^{N-1} z_{n+1} \Delta y_n.$$

Varianti di questa si ottengono facilmente dalle ulteriori uguaglianze nella (2.3).

## 2.2 Equazioni alle differenze del primo ordine

Consideriamo, ora, l'*equazione alle differenze*

$$\Delta y_n = g_n, \quad n \geq n_0,\tag{2.6}$$

in cui supponiamo che la successione  $\{g_n\}$  sia nota. L'equazione è detta *del primo ordine*, in quanto può essere riscritta come

$$y_{n+1} = y_n + g_n, \quad n \geq n_0.\tag{2.7}$$

Allora, formalmente, la sua soluzione verrà denotata con

$$y_n = \Delta^{-1} g_n,\tag{2.8}$$

in cui  $\Delta^{-1}$  è l'operatore *antidifferenza*. Sostituendo la (2.8) nella (2.6), si ottiene che

$$\Delta(\Delta^{-1} g_n) = g_n,$$

da cui si conclude che, formalmente,

$$\Delta\Delta^{-1} = I. \quad (2.9)$$

Osserviamo tuttavia che tale soluzione non è unica, in quanto, se  $\{w_n\}$  è una successione costante (data da una qualunque funzione che assuma valori costanti in  $\Omega$ ), allora, risulta  $\Delta w_n = 0$  e, pertanto,

$$y_n = \Delta^{-1}g_n + w_n, \quad (2.10)$$

è ancora soluzione della (2.6). Pertanto,

$$\Delta^{-1}g_n = y_n - w_n.$$

Sostituendo, in virtù della (2.6)  $g_n = \Delta y_n$ , si ottiene, quindi,

$$\Delta^{-1}(\Delta y_n) = y_n - w_n, \quad (2.11)$$

da cui si deduce, utilizzando un abuso di notazione, che

$$\Delta^{-1}\Delta = I - w_n,$$

stando ciò a significare che il primo membro consiste nell'applicare l'operatore  $I$  sottraendo una qualunque successione costante al risultato ottenuto. Da quanto appena esposto, segue che dall'equazione

$$\Delta y_n = \Delta z_n, \quad n \geq n_0,$$

segue che, in virtù della (2.11), che

$$y_n = z_n + w_n, \quad n \geq n_0,$$

essendo, al solito,  $\{w_n\}$  una successione costante.

Evidentemente, la (successione) costante nella (2.10) viene univocamente determinata nel momento in cui alla equazione (2.6) è associata una *condizione iniziale*  $y_{n_0}$ . In tal caso, infatti, la successione soluzione  $\{y_n\}$  è univocamente determinata, in virtù della formulazione equivalente (2.7), avendo fissato il valore iniziale  $y_{n_0}$ .

Osserviamo che, in virtù della (2.5), dalle (2.6) e (2.8) segue che, in analogia con il caso continuo,

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} g_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = \Delta^{-1}\Delta y_n \Big|_{n=n_0}^N = y_n \Big|_{n=n_0}^N = \Delta^{-1}g_n \Big|_{n=n_0}^N. \quad (2.12)$$

Pertanto, conoscere l'antidifferenza di una funzione discreta, consente di calcolarne facilmente le somme tra due qualunque indici assegnati. Questo risultato costituisce l'analogo discreto del caso in cui, nel continuo, è facile calcolare l'integrale definito di una funzione di cui sia nota la primitiva.

### 2.3 Potenze fattoriali

Abbiamo visto che gli operatori differenza ed antidifferenza svolgono un ruolo analogo agli operatori di derivazione ed integrazione nel continuo. Inoltre, nel continuo è facile calcolare la derivata e l'integrale della funzione potenza  $n$ -esima (con  $n \geq 1$ ):

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cost, \quad n \geq 1.$$

Inoltre,

$$x^0 = 1, \quad \forall x, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{se } x \neq 0.$$

Nel discreto, questo ruolo è svolto dalla *pseudopotenza*, o *potenza fattoriale*,  $n$ -esima di  $x$ :

$$x^{(n)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}_n. \quad (2.13)$$

Quindi, ad esempio,

$$10^{(4)} = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 5040,$$

che, osserviamo, differisce alquanto da  $10^4$ . Definendo la funzione discreta  $g_k = (x+k)^{(n)}$ , essendo  $x \in \mathbb{R}$  assegnato (ovvero, assumendo  $\Omega = \{x, x+1, x+2, \dots\}$ ), si verifica facilmente che

$$\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} = nx^{(n-1)},$$

da cui si deduce, sempre in analogia con il caso continuo, che

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} - w(x),$$

essendo  $w(x)$  una funzione periodica di periodo 1. Inoltre, dalla relazione:

$$\begin{aligned} x^{(m+n)} &= x(x-1)\cdots(x-m+1) \cdot (x-m)\cdots(x-m-n+1) \\ &= x^{(m)}(x-m)^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ponendo, nella (2.14)  $m = 0$ , si ottiene:

$$x^{(n)} = x^{(0)}x^{(n)},$$

da cui si ricava, in analogia con il caso continuo, che

$$x^{(0)} = 1. \quad (2.15)$$

Similmente, ponendo nella (2.14)  $m = -n$ , si ottiene

$$x^{(0)} = x^{(-n)}(x+n)^{(n)}$$

da cui, se  $(x+n)^{(n)} \neq 0$ , si ricava, tenendo conto delle (2.13) e (2.15):

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \quad (2.16)$$

Vediamo alcune semplici proprietà delle potenze fattoriali:

- se  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $x^{(n)}$  è un polinomio monico di grado  $n$  in  $x$ , le cui radici sono  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ;
- se  $k$  è un intero naturale,  $k^{(n)} = 0$ , se  $n > k$ ;
- se  $k$  è un intero,

$$k^{(k)} = k^{(k-1)} = k! \quad (2.17)$$

- se  $n, k$  sono interi,  $n \geq k$ ,

$$\frac{n^{(k)}}{k^{(k)}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Tabella 2.1: Numeri di Stirling di seconda specie  $\{S_i^n\}$  (vedi (2.18)).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
⋮	⋮					⋱

## 2.4 I numeri di Stirling

È possibile stabilire precisamente la relazione algebrica tra potenze e pseudopotenze. In particolare, questa è definita da:

$$x^n = \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i)}, \quad n \geq 1, \quad (2.18)$$

dove i coefficienti  $\{S_i^n\}$  sono i *numeri di Stirling di seconda specie* (si veda la Tabella 2.1). Vale il seguente risultato.

**Teorema 2.1** Per ogni  $n \geq 1$ , numeri di Stirling (di seconda specie) sono definiti in modo ricorrente come segue:

$$S_1^n = S_n^n = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e, inoltre,

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n + iS_i^n, \quad i = 2, \dots, n.$$

Dimostrazione. Per  $n = 1$  si ottiene  $S_1^1 = 1$ , e questo è vero, avendosi  $x^{(1)} = x$ . Assunto vera la tesi per  $n$ , si ottiene, per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x \cdot x^n = x \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n S_i^n (x - i + i)x^{(i)} = \sum_{i=1}^n S_i^n [(x - i)x^{(i)} + ix^{(i)}] \\ &= \sum_{i=1}^n S_i^n [x^{(i+1)} + ix^{(i)}] = S_1^n x^{(1)} + \sum_{i=2}^n (S_{i-1}^n + iS_i^n)x^{(i)} + S_n^n x^{(n+1)} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n+1} S_i^{n+1} x^{(i)}, \end{aligned}$$

da cui la tesi segue facilmente.  $\square$

Osserviamo che, definendo la matrice triangolare inferiore (a diagonale unitaria)

$$T_n = \begin{pmatrix} S_1^1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ S_1^n & \dots & S_n^n & \end{pmatrix}$$



Tabella 2.2: Numeri di Stirling di prima specie  $\{s_i^n\}$  (vedi (2.19)).

$n \setminus i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

ed i vettori

$$\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix},$$

vale, in virtù della (2.18),

$$\mathbf{x}^n = T_n \mathbf{x}^{(n)}.$$

Da questo si ricava che

$$\mathbf{x}^{(n)} = T_n^{-1} \mathbf{x}^n.$$

Denotando con  $s_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , l'elemento  $(i, j)$  della matrice triangolare inferiore  $T_n^{-1}$ , si ricava l'espressione delle potenze fattoriali in funzione delle potenze:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n s_i^n x^i, \quad n \geq 1. \quad (2.19)$$

Alcuni dei coefficienti  $\{s_i^n\}$ , denominati *numeri di Stirling di prima specie*, sono riportati in Tabella 2.2.

La relazione (2.18) che lega potenze e pseudopotenze, permette di derivare facilmente alcune interessanti proprietà.

**Teorema 2.2** *Se  $p(x) \equiv \text{cost}$ , allora  $\Delta p(x) = 0$ .*

La dimostrazione è ovvia. Più in generale, vale il seguente risultato.

**Teorema 2.3** *Se  $p(x) \in \Pi_n$ , allora  $\Delta^j p(x) \in \Pi_{\max\{0, n-j\}}$ .*

Dimostrazione. Infatti, basta osservare che, in generale, considerato che

$$\Delta^j x^{(i)} = j^{(1)} \Delta^{j-1} x^{(j-1)} = j^{(2)} \Delta^{j-2} x^{(i-2)} = \dots = j^{(i)} \Delta^0 x^{(i-j)},$$

dalla (2.17) segue:

$$\begin{aligned} \Delta^j x^k &= \Delta^j \left[ \sum_{i=1}^k S_i^k x^{(i)} \right] = \sum_{i=1}^k S_i^k \Delta^j x^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^k S_i^{k; (j)} x^{(i-j)} = \sum_{i=j}^k S_i^{k; (j)} x^{(i-j)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \equiv 0, & \text{se } j > k, \\ \in \Pi_{k-j}, & \text{se } j \leq k. \square \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vediamo qualche applicazione delle potenze fattoriali:

1.  $\Delta \binom{x}{j} = \binom{x}{j-1}$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{j} &\equiv \binom{x+1}{j} - \binom{x}{j} = \frac{\Delta x^{(j)}}{j!} \\ &= \frac{jx^{(j-1)}}{j!} = \frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!} = \binom{x}{j-1}. \end{aligned}$$

2. Dalla precedente proprietà, discende immediatamente che:

$$\Delta^{-1} \binom{x}{j} = \binom{x}{j+1} + w(x),$$

dove  $w(x)$  è periodica di periodo 1.

3.  $\sum_{x=k}^n \binom{x}{j} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}$ . Infatti:

$$\sum_{x=k}^n \binom{x}{j} = \Delta^{-1} \binom{x}{j} \Big|_{x=k}^{n+1} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}.$$

**Esercizio 2.3** Calcolare, utilizzando le potenze fattoriali, le seguenti somme:

$$\sum_{i=1}^n i^k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

**Esercizio 2.4** Dimostrare che, considerato l'insieme discreto  $\Omega = \{x_0 + nh, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , allora

$$E^k f_n = \sum_{i=0}^k \frac{\Delta^i f_n}{h^i i!} (k^{(i)} h^i).$$

## 2.5 Ancora sulle equazioni alle differenze del primo ordine

Abbiamo visto che la soluzione di una equazione alle differenze del primo ordine (2.7) in cui sia assegnata la condizione iniziale  $y_{n_0}$ , è data da:

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i, \quad n \geq n_0. \quad (2.20)$$

Possiamo generalizzare questo risultato al caso di equazioni del tipo:

$$y_{n+1} = p_n y_n + g_n, \quad n \geq n_0, \quad y_{n_0} \text{ fissato}, \quad (2.21)$$

in cui le successioni  $\{p_n\}$  e  $\{g_n\}$  sono note e, inoltre,  $p_n \neq 0$ , per ogni  $n \geq n_0$ . Ponendo:

$$P_{n_0} = 1, \quad P_{n+1} = P_n \cdot p_n \equiv \prod_{i=n_0}^n p_i, \quad n \geq n_0, \quad (2.22)$$

si ottiene, dividendo i due membri della (2.21) per  $P_{n+1}$ :

$$\frac{y_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{y_n}{P_n} + \frac{g_n}{P_{n+1}}, \quad n \geq n_0.$$

Ponendo

$$z_n = P_n^{-1} y_n, \quad q_n = P_{n+1}^{-1} g_n, \quad n \geq n_0, \quad (2.23)$$

si perviene, infine, all'equazione

$$z_{n+1} = z_n + q_n, \quad n \geq n_0, \quad z_{n_0} = y_{n_0}, \quad (2.24)$$

che è della forma (2.7). La soluzione è, pertanto (vedi (2.20)),

$$z_n = z_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} q_i, \quad n \geq n_0.$$

Tenendo conto delle (2.22)-(2.23), si ottiene quindi:

$$y_n = P_n y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} P_n P_{i+1}^{-1} g_i \equiv \left( \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k \right) y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left( \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k \right) g_i, \quad n \geq n_0, \quad (2.25)$$

che, evidentemente, soddisfa la condizione iniziale,  $y_{n_0}$ , assegnata.

**Osservazione 2.1** Si dimostra facilmente che l'ultimo membro della (2.25) risulta essere ancora definito, e fornisce una espressione esplicita della soluzione  $\{y_n\}$ , anche rilassando la condizione  $p_n \neq 0$ ,  $n \geq n_0$ .

**Esercizio 2.5** Risolvere l'equazione

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left( y_n + \frac{A}{y_n} \right), \quad n \geq 0,$$

dove  $y_0 > 0$  e  $A > 0$ . Determinarne, quindi, il limite per  $n \rightarrow \infty$ . (Suggerimento: porre  $y_n = \sqrt{A} \cotgh z_n$ ).

**Esercizio 2.6 (metodo di Horner)** Risolvere l'equazione

$$y_i = x y_{i-1} + b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = b_0, \quad (2.26)$$

in cui  $x \in \mathbb{R}$  è assegnato. Dimostrare che

$$y_n = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}.$$

La (2.26) definisce il metodo di Horner per il calcolo del polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i},$$

con una complessità di  $2n$  operazioni algebriche elementari.

## 2.6 Teoremi del confronto

Oltre alle equazioni alle differenze, è spesso utile, in Analisi Numerica, poter discutere *disequazioni alle differenze*. Alcune di queste, possono essere studiate in modo relativamente semplice mediante il *principio del confronto*, che si applica anche al caso continuo, oltre che a quello discreto. Di seguito, si enunciano i risultati più importanti.

**Teorema 2.4** *Sia  $g(n, y)$  una funzione non decrescente rispetto al secondo argomento. Si considerino, quindi, le seguenti disequazioni alle differenze:*

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n), \quad u_{n+1} \geq g(n, u_n), \quad n \geq n_0.$$

*Se  $y_{n_0} \leq u_{n_0}$ , allora:  $y_n \leq u_n$ , per ogni  $n \geq n_0$ .*

Dimostrazione. Ragionando per induzione, la tesi è vera per  $n = n_0$ . Supponiamola vera per  $n$ , ovvero  $y_n \leq u_n$ , e dimostriamo per  $n + 1$ . Si ottiene:

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n) \leq g(n, u_n) \leq u_{n+1},$$

in virtù dell'ipotesi di induzione e del fatto che  $g$  è non decrescente rispetto al secondo argomento.  $\square$

Osserviamo che, nel precedente teorema, se si assume una delle due disequazioni essere una equazione alle differenze, la tesi continua a valere. Risolvendo questa equazione, denominata *equazione del confronto*, è possibile ottenere una maggiorazione (o minorazione, a seconda del caso) esplicita per ogni successione che soddisfa l'altra disequazione.

**Teorema 2.5** *Siano  $g(n, i, y)$ , non decrescente rispetto ad  $y$ , e  $p_n$  successioni note. Inoltre, supponiamo che:*

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, y_i), \quad u_n \geq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, u_i), \quad n \geq n_0.$$

*Allora,  $y_n \leq u_n$ , per  $n \geq n_0$ .*

Dimostrazione. La tesi è evidentemente vera per  $n = n_0$ , avendosi

$$y_{n_0} \leq p_{n_0} \leq u_{n_0}.$$

Si supponga vera la tesi fino ad  $n - 1$ , e dimostriamo per  $n$ :

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, y_i) \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, u_i) \leq u_n,$$

in virtù dell'ipotesi di induzione  $y_i \leq u_i$ ,  $i = n_0, \dots, n - 1$ .  $\square$

Da questi, si ottengono i seguenti corollari.

**Corollario 2.1** *Siano  $p_n \geq 0$  e  $g_n$ , per  $n \geq n_0$ , successioni note. Sia inoltre  $\{y_n\}$  tale che:*

$$y_{n+1} \leq p_n y_n + g_n, \quad n \geq n_0.$$

*Allora:*

$$y_n \leq y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k, \quad n \geq n_0.$$

Dimostrazione. La tesi discende immediatamente dalla (2.25), considerando che l'equazione del confronto coincide, in questo caso, con la (2.21).  $\square$

**Corollario 2.2** *Siano  $p_n \geq 0$  e  $g_n$ , per  $n \geq n_0$ , successioni note. Sia inoltre  $\{y_n\}$  tale che:*

$$y_n \leq y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i y_i + g_i], \quad n \geq n_0.$$

Allora:

$$y_n \leq y_{n_0} \exp \left( \sum_{k=n_0}^{n-1} p_k \right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \exp \left( \sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right), \quad n \geq n_0.$$

Dimostrazione. L'equazione del confronto è:

$$u_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i u_i + g_i], \quad n \geq n_0.$$

Da questa si ottiene che

$$\Delta u_n = p_n u_n + g_n,$$

ovvero,

$$u_{n+1} = (1 + p_n) u_n + g_n,$$

la cui soluzione è data, in virtù delle (2.21) e (2.25), da:

$$u_n = y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \quad n \geq n_0.$$

La tesi si completa osservando che, essendo  $p_k \geq 0$ , allora  $(1 + p_k) \leq \exp p_k$ .  $\square$

**Corollario 2.3 (lemma di Gronwall nel discreto)** *Siano  $p_n \geq 0$  e  $g_n$ , per  $n \geq n_0$ , successioni note e, inoltre,*

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i y_i, \quad n \geq n_0. \quad (2.27)$$

Allora, per  $n \geq n_0$ :

$$y_n \leq g_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k) \quad (2.28)$$

$$\leq g_{n_0} \exp \left( \sum_{k=n_0}^{n-1} p_k \right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \exp \left( \sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right), \quad (2.29)$$

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k) \quad (2.30)$$

$$\leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp \left( \sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right). \quad (2.31)$$

Dimostrazione. Le (2.28)-(2.29) si derivano facilmente considerando l'equazione del confronto,

$$u_n = g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i u_i, \quad n \geq n_0,$$

da cui si deduce

$$\Delta u_n = \Delta g_n + p_n u_n, \quad n \geq n_0, \quad u_{n_0} = g_{n_0},$$

ovvero

$$u_{n+1} = (1 + p_n)u_n + \Delta g_n, \quad n \geq n_0, \quad u_{n_0} = g_{n_0}.$$

La soluzione è quindi data da (confrontare con (2.21) e (2.25))

$$u_n = g_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \quad n \geq n_0,$$

da cui la (2.28) discende immediatamente. La (2.29) si ottiene quindi osservando che, essendo  $p_k \geq 0$ , allora  $(1 + p_k) \leq \exp p_k$ . Per dimostrare le (2.30) e (2.31), si ponga:

$$v_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} p_k y_i, \quad n \geq n_0.$$

Pertanto la (2.27) diviene:

$$y_n \leq g_n + v_n, \quad n \geq n_0. \quad (2.32)$$

D'altronde, si ha

$$\Delta v_n = p_n y_n \leq p_n g_n + p_n v_n,$$

ovvero:

$$v_{n+1} \leq (1 + p_n)v_n + p_n g_n, \quad n \geq n_0, \quad v_{n_0} = 0.$$

Usando argomenti simili a quelli usati nella dimostrazione del Corollario 2.2 si ottiene, quindi,

$$v_n \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp \left( \sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right).$$

Le (2.30) e (2.31) si ottengono quindi sostituendo, rispettivamente, le ultime due maggiorazioni al secondo membro della (2.32).  $\square$

Risultati analoghi a quelli visti nel caso discreto valgono nel caso continuo. Si riportano di seguito per completezza, omettendone la dimostrazione.

**Teorema 2.6** *Sia  $g(t, y)$  continua e Lipschitziana rispetto a  $y$ . Se  $y(t)$  e  $u(t)$  sono due funzioni derivabili tali che*

$$y'(t) \leq g(t, y(t)), \quad u'(t) \geq g(t, u(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

*e, inoltre,  $y(t_0) \leq u(t_0)$ , allora:*

$$y(t) \leq u(t), \quad t \in [t_0, T].$$

**Corollario 2.4 (lemma di Gronwall)** *Sia*

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds, \quad t \in [t_0, T],$$

*essendo  $g(t)$ , e  $p(t) \geq 0$ , funzioni continue assegnate. Allora:*

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t p(s)g(s) \exp\left(\int_s^t p(x)dx\right) ds, \quad t \in [t_0, T].$$