

Capitolo 10

Cenni sulla risoluzione di equazioni alle derivate parziali

In questo capitolo, vedremo brevemente come sia possibile utilizzare l'apparato metodologico, visto per le equazioni differenziali ordinarie, per il trattamento numerico di problemi evolutivi descritti da equazioni alle derivate parziali. Per la precisione, esamineremo i problemi di tipo parabolico ed iperbolico, con una menzione alle equazioni di trasporto e diffusione, che si ritrovano comunemente in molte applicazioni. In entrambi i casi, utilizzeremo la stessa tecnica di risoluzione, denominata *metodo delle linee*, che consiste nella semidiscretizzazione delle derivate spaziali del problema. Si ottiene, in questo modo, un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineare, caratterizzato dal fatto che, al tendere del parametro di discretizzazione a zero, tende ad avere dimensione infinita. Pertanto, nelle questioni di stabilità lineare, non si potranno utilizzare gli stessi argomenti visti per i sistemi a dimensione fissa. Per questo motivo, sarà necessario introdurre la nozione di spettro dell'operatore infinito limite, i cui autovalori determineranno le condizioni richieste per l'analisi di stabilità lineare. Per questo motivo, inizieremo la nostra trattazione trattando degli operatori infiniti.

10.1 Famiglie di matrici ed operatori di Toeplitz a banda

Una *matrice di Toeplitz* ha elementi costanti lungo le sue diagonali. Particolari matrici di Toeplitz sono quelle *a banda*: una matrice di Toeplitz a banda di dimensione N avrà una struttura del tipo

$$T_N = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_k & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ a_{-m} & & \ddots & & a_k \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & a_{-m} & \dots & a_0 \end{pmatrix}_{N \times N}, \quad (10.1)$$

in cui a_ℓ denota l'elemento (costante) sulla diagonale $\ell \equiv j - i$, dove (i, j) sono gli indici dell'elemento generico su questa diagonale. In particolare:

- se $\ell > 0$ si tratterà della ℓ -esima *sopra*-diagonale;
- se $\ell = 0$ si tratta della diagonale principale;

- se $\ell < 0$ si tratta della $(-\ell)$ -esima sotto-diagonale della matrice.

Pertanto, la matrice T_N avrà *ampiezza di banda superiore* pari a k ed *inferiore* pari ad m . È evidente che la *famiglia di matrici* $\{T_N\}$ è completamente caratterizzata dal seguente polinomio,

$$p(z) = \sum_{i=-m}^k a_i z^{i+m} \in \Pi_{m+k}, \quad (10.2)$$

definito dai coefficienti delle diagonali. Sarà altresì utile introdurre il corrispondente *simbolo*, che è la funzione razionale definita come:

$$g(z) = z^{-m}p(z) \equiv \sum_{i=-m}^k a_i z^i. \quad (10.3)$$

Abbiamo bisogno di introdurre la seguente nozione.

Definizione 10.1 *Un polinomio $p(z) \in \Pi_k$ si dirà avere tipo (k_1, k_2, k_3) se esso ha:*

- k_1 radici di modulo minore di 1;
- k_2 radici di modulo 1;
- k_3 radici di modulo maggiore di 1.

Chiaramente, dovrà aversi $k_1 + k_2 + k_3 = k$.

Osservazione 10.1 *I polinomi di tipo $(k, 0, 0)$ sono i polinomi di Schur, mentre quelli di tipo $(k_1, k_2, 0)$, con le radici di modulo 1 tutte semplici, sono i polinomi di Von Neumann.*

È possibile dimostrare il seguente risultato.¹

Teorema 10.1 *Se il polinomio (10.2) associato alla famiglia $\{T_N\}$ ha tipo $(m, 0, k)$, allora le matrici della famiglia sono invertibili (in generale, da un certo indice \bar{N} in poi) e, inoltre, i loro numeri di condizionamento, $\{\kappa(T_N)\}$, sono uniformemente limitati. Ovvero, $\exists \gamma > 0$ tale che:*

$$\kappa(T_N) \leq \gamma, \quad \forall N \geq \bar{N}.$$

Sotto le stesse condizioni, risulta essere *invertibile con continuità* l'operatore infinito

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N. \quad (10.4)$$

Vediamo di rendere più precisa questa affermazione. La matrice infinita T può essere riguardata come un operatore definito nello spazio di Banach delle successioni infinite,

$$\ell_1 = \left\{ \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots)^T : \|\mathbf{x}\| < \infty \right\}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

Definizione 10.2 *Sia dato $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$, operatore di Toeplitz. Esso si dirà invertibile con continuità se:*

¹P. Amodio, L. Brugnano. The Conditioning of Toeplitz Banded Matrices. *Mathematical and Computer Modelling* **23**(10) (1996) 29-42.

1. $\forall \mathbf{y} \in \ell_1 \exists \mathbf{x} \in \ell_1 : T\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. $\exists \mu > 0 : \|T\mathbf{x}\| \geq \mu\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \ell_1$.

In tal caso, T ammette un'inversa limitata:

$$\|T^{-1}\| \leq \mu^{-1}. \quad (10.5)$$

Vale il seguente risultato:

Teorema 10.2 *Sia T l'operatore di Toeplitz a banda definito dalle (10.1)-(10.4). Allora T è invertibile con continuità se e solo se il polinomio (10.2) associato è di tipo $(m, 0, k)$.*

Osservazione 10.2 *Pertanto, T sarà invertibile con continuità se e solo se il polinomio $p(z)$ associato ha un numero di radici nel cerchio aperto unitario pari al numero m delle sotto-diagonali, e le rimanenti k radici al di fuori del cerchio unitario chiuso. Queste ultime saranno in numero pari a quello delle sopra-diagonali di T .*

Data la nozione di invertibilità con continuità, possiamo definire lo *spettro* dell'operatore T come

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non è invertibile con continuità}\}. \quad (10.6)$$

In virtù del Teorema 10.2, si ha, definendo il polinomio (vedi (10.2))

$$p_\lambda(z) = p(z) - \lambda z^m,$$

la seguente caratterizzazione:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_\lambda(z) \text{ non è di tipo } (m, 0, k)\}.$$

Ricordando che le radici di un polinomio sono funzioni analitiche dei suoi coefficienti e che, inoltre, il tipo del polinomio $p_\lambda(z)$ tende a $(m, 0, k)$, per $\lambda \rightarrow \infty$, si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

1. $\sigma(T)$ è un insieme chiuso e limitato;
2. $\sigma(T)$ è un insieme connesso;
3. se $p(z)$ ha coefficienti reali, $\sigma(T)$ è simmetrico rispetto all'asse reale;
4. se T è Hermitiana, $\sigma(T)$ è un segmento dell'asse reale.

Con argomenti simili a quelli visti nel caso dei metodi LMF, si considera il *boundary locus* associato all'operatore T , come il luogo dei punti del piano complesso in cui $p_\lambda(z)$ ha una radice di modulo 1. Ricordando la definizione (10.3) del simbolo di T , si vede agevolmente che il *boundary locus* dell'operatore T è definito da:

$$\sigma_+(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = g(e^{i\theta}), \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Come per i metodi LMF, $\sigma_+(T)$ dividerà il piano complesso in regioni connesse all'interno delle quali il tipo del polinomio è costante. Controllando il tipo del polinomio in un qualunque punto in ciascuna di queste regioni, conduce ad una rapida individuazione di $\sigma(T)$, la cui frontiera è contenuta in $\sigma_+(T)$.

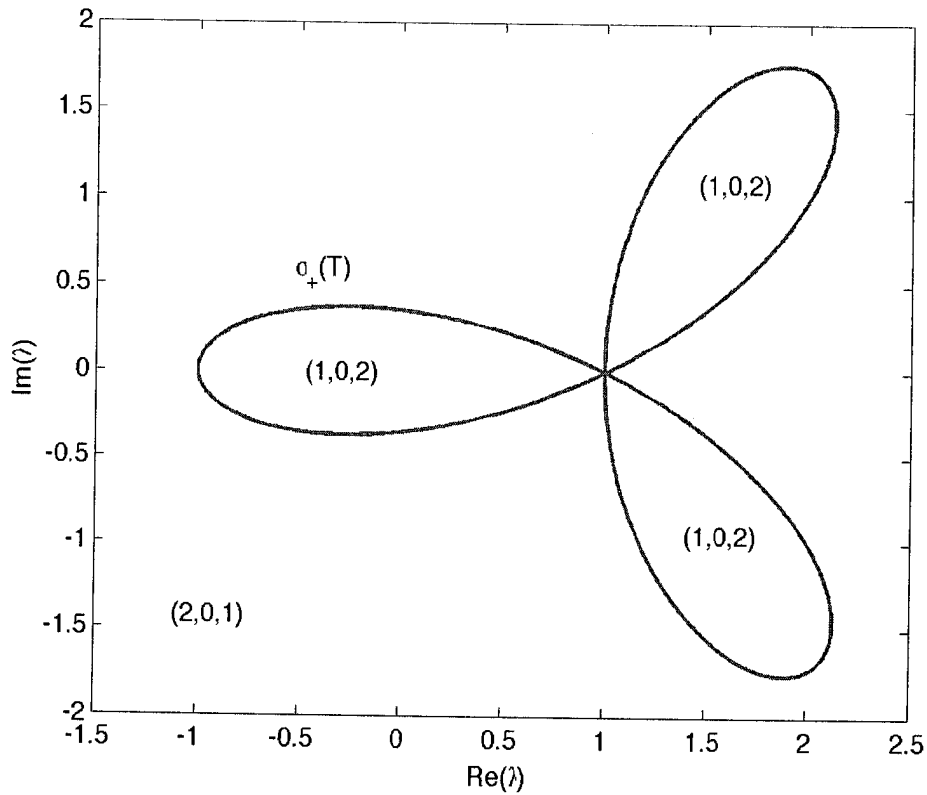


Figura 10.1: *Boundary locus* dell'operatore (10.7).

Si consideri, ad esempio, l'operatore:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

Il suo *boundary locus* è graficato in Figura 10.16, dove è anche riportato il tipo del polinomio $p_\lambda(z)$ nelle varie regioni in cui esso divide il piano complesso. Le tre regioni limitate, inclusa la frontiera, costituiscono lo spettro $\sigma(T)$ dell'operatore. Al di fuori di questo, il tipo del polinomio $p_\lambda(z)$ è $(2,0,1)$ e, pertanto, $T - \lambda I$ sarà sempre invertibile con continuità.

Osservazione 10.3 *Si può dimostrare che lo spettro $\sigma(T)$ dell'operatore (10.4) coincide, essenzialmente, con il cosiddetto spettro della famiglia $\{T_N\}$, costituito dall'unione degli autovalori delle matrici della famiglia, e dei cosiddetti quasi-autovalori.*²

²Si vedano, a riguardo:

1) G. Di Lena, D. Trigiante. On the spectrum of families of matrices with applications to stability problems. *Lecture Notes in Mathematics* **1386** (1989) 36–53.
 2) L. Brugnano, D. Trigiante. *Solving differential problems by multistep initial and boundary value methods*. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 6. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998, Capitolo 3.

10.2 L'equazione del calore

Consideriamo un classico esempio di equazione *parabolica*, e cioè l'*equazione del calore*,

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \quad (10.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (10.9)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (10.10)$$

Essa descrive la *diffusione* del calore in una sbarra conduttrice di lunghezza unitaria che al tempo 0 ha una distribuzione di calore data da $u_0(x)$, ed è a temperatura nulla agli estremi.³ Pertanto, le (10.9) e (10.10) saranno, rispettivamente, la *condizione iniziale* e le *condizioni al bordo* per l'equazione (10.8). Fissato un passo di discretizzazione

$$\Delta x = \frac{1}{N} \quad (10.11)$$

per la variabile spaziale, è possibile discretizzare il secondo membro della (10.8), sulla *mesh*

$$x_i = i\Delta x \equiv \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (10.12)$$

definendo le funzioni

$$u_i(t) \approx u(x_i, t), \quad i = 0, \dots, N. \quad (10.13)$$

Definendo, quindi, i vettori

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ \vdots \\ u_0(x_{N-1}) \end{pmatrix},$$

è possibile trasformare la (10.8)-(10.9) (e tenendo conto delle condizioni ai bordi (10.10)) nella seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{u}'(t) = \frac{1}{\Delta x^2} T_N \mathbf{u}(t), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad (10.14)$$

dove

$$T_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}. \quad (10.15)$$

Infatti, questo equivale ad utilizzare la seguente approssimazione della derivata seconda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t) = \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Evidentemente, quando il parametro di discretizzazione Δx tende a 0, la dimensione del sistema (vedi (10.11)) tende ad infinito. Pertanto, ai fini dell'analisi di stabilità lineare, considereremo lo spettro dell'operatore infinito,

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N,$$

³Ovviamente, dovrà aversi $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

che, utilizzando i risultati esposti in Sezione 10.1, si vede facilmente essere dato da

$$\sigma(T) = [-4, 0]. \quad (10.16)$$

Essendo la soluzione del problema continuo asintoticamente stabile, richiediamo la stessa cosa all'approssimazione numerica ottenuta con un metodo alla differenze. Fissata una discretizzazione temporale

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (10.17)$$

se utilizziamo il metodo di Eulero esplicito per risolvere (10.14), si ottiene lo schema iterativo

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N \mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

dove, al solito, $\mathbf{u}_k \approx \mathbf{u}(t_k)$. Affinché la soluzione discreta sia stabile, qualunque sia la dimensione N utilizzata, dovrà aversi, considerando la (10.16),

$$4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2.$$

Chiaramente, questa condizione è assai restrittiva, perché impone una restrizione molto severa sul passo temporale, quando $\Delta x \rightarrow 0$. Sarà, pertanto, conveniente utilizzare un metodo implicito. In particolare, se usiamo il metodo dei trapezi, si ottiene uno schema del secondo ordine anche nel tempo, noto come *metodo di Crank-Nicolson*. Ponendo

$$\alpha = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2},$$

il metodo diviene:

$$(I_{N-1} - \alpha T_N) \mathbf{u}_{k+1} = (I_{N-1} + \alpha T_N) \mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.18)$$

In questo caso, essendo il metodo dei trapezi A -stabile, non vi sono restrizioni sul passo temporale: si parla, in questo ambito, di *stabilità incondizionata* per il metodo. Tuttavia, per mere questioni di accuratezza, sarà conveniente utilizzare $\Delta t = \Delta x$, in modo da avere la stessa accuratezza sia nello spazio che nel tempo. In Figura 10.2 riportiamo il risultato dell'applicazione del metodo dei trapezi per risolvere (10.8)–(10.10), con $u_0(x) = \sin(\pi x)$, utilizzando come passi di discretizzazione

$$\Delta x = \Delta t = \frac{1}{50}.$$

Osserviamo che, per ottenere un risultato qualitativamente simile, il metodo di Eulero esplicito avrebbe richiesto un passo

$$\Delta t = \frac{1}{2\Delta x^2} = \frac{1}{5000}.$$

10.2.1 Complessità computazionale del metodo di Crank-Nicolson

Analizziamo la complessità dell'implementazione del metodo di Crank-Nicolson (10.18), tenendo conto della struttura della matrice (10.15). Si tratta, in effetti, di risolvere un sistema di equazioni *tridiagonale*, della forma

$$T(\alpha) \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{b},$$

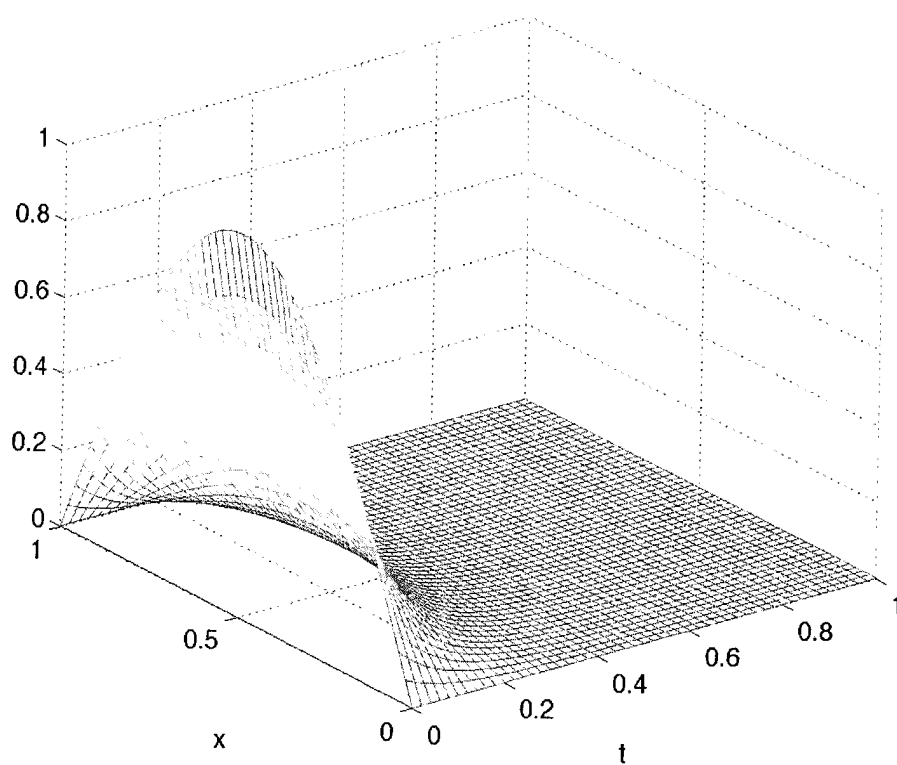


Figura 10.2: Metodo di Crank-Nicolson per approssimare la soluzione del problema (10.8)–(10.10), $u_0(x) = \sin(\pi x)$, con passi $\Delta x = \Delta t = 1/50$.

con, in generale

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \end{pmatrix}, \quad u_i^k \approx u(x_i, t_k),$$

il termine noto

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b_i = (1 - 2\alpha)u_i^k + \alpha(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (10.19)$$

e la matrice dei coefficienti

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & & & \\ -\alpha & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -\alpha & \\ & & & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}. \quad (10.20)$$

Evidentemente, la costruzione del termine noto ha complessità lineare, sia in termini di operazioni algebriche ($\approx 4N$) che di memoria (un vettore di lunghezza $N-1$). Riguardo alla matrice $T(\alpha)$, si verifica facilmente che

$$T(\alpha) = LD^{-1}L^T, \quad (10.21)$$

con

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ -\alpha & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\alpha & d_{N-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (10.22)$$

e gli elementi diagonali di D dati da:

$$d_1 = 1 + 2\alpha, \quad d_i = (1 + 2\alpha) - \frac{\alpha^2}{d_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (10.23)$$

Evidentemente, la fattorizzazione (10.21) richiede, per essere memorizzata, solo di N posizioni di memoria: $N-1$ per gli elementi diagonali di D e lo scalare α . Anche il numero di operazioni per ottenere la fattorizzazione (10.23) è lineare in N : $\approx 2N$ operazioni algebriche elementari. Il sistema $T(\alpha)\mathbf{u} = \mathbf{b}$ si risolve, pertanto, mediante il seguente algoritmo, in cui il vettore $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$ contiene, in ingresso, il termine noto \mathbf{b} , ed è riscritto con la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1/d_1, & u_i &= (u_i + \alpha u_{i-1})/d_i, & i &= 2, \dots, N-1, \\ u_i & & u_i &= d_i u_i, & i &= 1, \dots, N-2, \\ u_{N-i} & & u_{N-i} &= (u_{N-i} + \alpha u_{N-i+1})/d_{N-i}, & i &= 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

per un totale di $\approx 7N$ operazioni algebriche elementari.

10.3 L'equazione delle onde

Per semplicità, considereremo solo la forma del primo ordine di tali problemi. Consideriamo, quindi, l'equazione *iperbolica*

$$u_t(x, t) = -u_x(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1] \times (0, \infty), \quad (10.24)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, \infty], \quad (10.25)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (10.26)$$

la cui soluzione si verifica essere data da

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x-t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (10.27)$$

Pertanto, l'onda con profilo iniziale $u_0(x)$ si sposterà verso *destra*, per $t > 0$, con velocità unitaria e, per $t > 1$ la soluzione sarà nulla, poiché l'onda fuoriesce dalla striscia. Fissata una partizione dell'intervallo spaziale analoga a quella vista per l'equazione del calore (vedi (10.11)-(10.12)), e continuando ad utilizzare la notazione (10.13), è possibile approssimare la derivata spaziale con delle *differenze all'indietro*, in considerazione che il dato al bordo (10.26) è posto in $x = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t) = \frac{u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Questo porta a definire il seguente sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{u}'(t) = -\frac{1}{\Delta x} L_N \mathbf{u}(t), \quad t \geq 0, \quad (10.28)$$

con

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad L_N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (10.29)$$

Applicando il metodo di Eulero esplicito per la sua approssimazione, si ottiene:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{\Delta t}{\Delta x} L_N \mathbf{u}_k \equiv \left(I_N - \frac{\Delta t}{\Delta x} L_N \right) \mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.30)$$

In questo caso, per quanto visto in Sezione 10.1, lo spettro dell'operatore

$$-L = \lim_{N \rightarrow \infty} -L_N$$

è dato dal cerchio unitario di centro -1 del piano complesso. Richiedendo che questo sia contenuto nella regione di assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito, si ottiene che

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \Delta x. \quad (10.31)$$

Questa restrizione non è molto penalizzante e, in effetti, la scelta $\Delta t = \Delta x$ è assai raccomandabile.

In un modo del tutto simile, per il problema:

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1) \times (0, \infty), \quad (10.32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, \infty], \quad (10.33)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (10.34)$$

la cui soluzione si verifica essere data da

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x+t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (10.35)$$

e, quindi, l'onda con profilo iniziale $u_0(x)$ si sposterà verso *sinistra*, per $t > 0$, con velocità unitaria e, per $t > 1$ la soluzione sarà nulla, poiché l'onda fuoriesce dalla striscia. Fissata una partizione dell'intervallo spaziale analoga a quella vista precedentemente, è possibile approssimare la derivata spaziale con delle *differenze in avanti*, in considerazione che il dato al bordo (10.26) è posto in $x = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Questo porta a definire il seguente sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{u}'(t) = \frac{1}{\Delta x} U_N \mathbf{u}(t), \quad t \geq 0, \quad (10.36)$$

con

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad U_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (10.37)$$

Applicando il metodo di Eulero esplicito per la sua approssimazione, si ottiene:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{\Delta t}{\Delta x} U_N \mathbf{u}_k \equiv \left(I_N - \frac{\Delta t}{\Delta x} U_N \right) \mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.38)$$

Anche in questo caso, lo spettro dell'operatore

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N$$

è dato dal cerchio unitario di centro -1 del piano complesso. Pertanto, si perviene alla stessa condizione (10.31) vista innanzi.

Dal punto di vista del costo computazionale, trattandosi di un metodo esplicito, si ha complessità lineare, sia per quanto riguarda il numero di operazioni per passo temporale, che per quanto riguarda l'occupazione di memoria. Di seguito si riportano gli algoritmi per (10.30) ed (10.38), rispettivamente, dove si è posto $\alpha = \Delta t / \Delta x$ e, al solito, si è denotato $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$. In entrambi i casi, $u_i^0 = u_0(x_i)$, $i = 0, \dots, N$:

$$u_0^{k+1} = 0, \quad u_i^{k+1} = (1 - \alpha)u_i^k + \alpha u_{i-1}^k, \quad i = 1, \dots, N,$$

e

$$u_N^{k+1} = 0, \quad u_i^{k+1} = (1 - \alpha)u_i^k + \alpha u_{i+1}^k, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

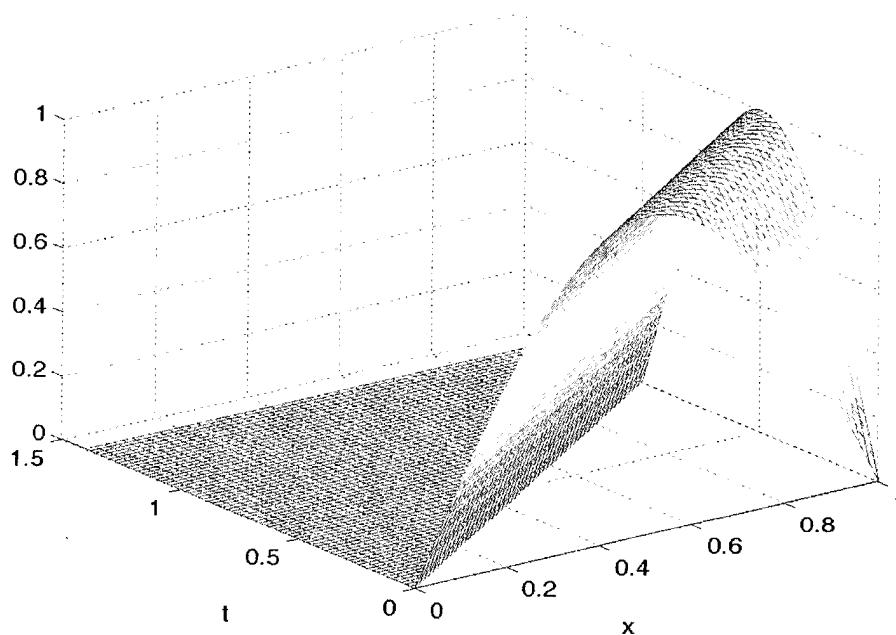


Figura 10.3: Metodo di Eulero esplicito per approssimare la soluzione del problema (10.24)–(10.26), $u_0(x) = \sin(\pi x)$, con passi $\Delta x = \Delta t = 1/50$.

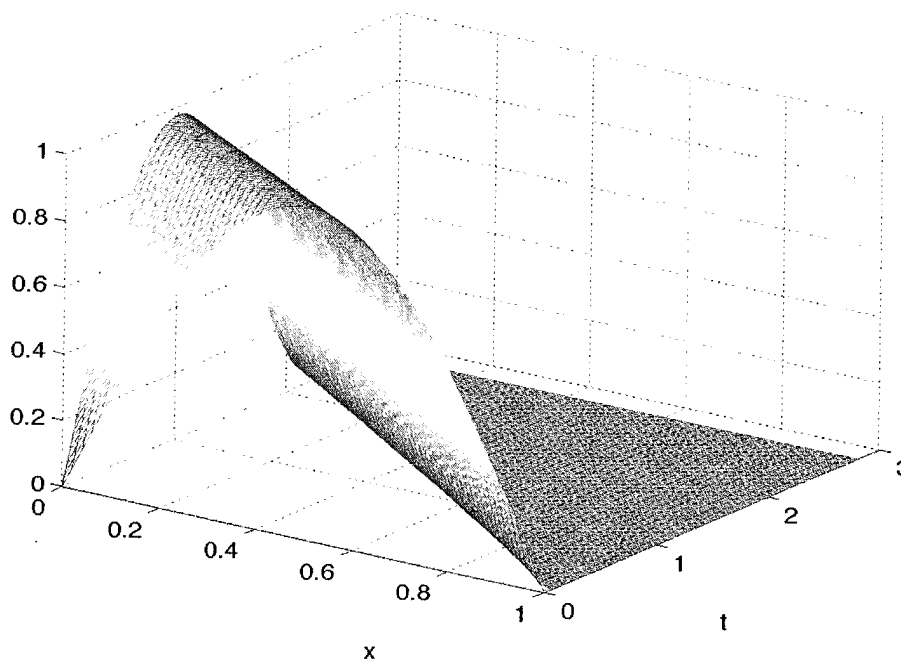


Figura 10.4: Metodo di Eulero esplicito per approssimare la soluzione del problema (10.32)–(10.34), $u_0(x) = \sin(\pi x)$, con passi $\Delta x = \Delta t = 1/50$.

In Figura 10.3 si riporta il risultato dell'applicazione del metodo (10.30) al problema (10.24)–(10.26), con passi temporale e spaziale uguali a $1/50$. Similmente, in Figura 10.4 si riporta il risultato dell'applicazione del metodo (10.38) al problema (10.32)–(10.34), con gli stessi passi temporale e spaziale.

Osservazione 10.4 *Chiaramente, i metodi (10.30) ed (10.38) hanno ordine 1, sia nello spazio che nel tempo.*

Definizione 10.3 *La discretizzazione con le differenze all'indietro o in avanti, in base al segno della derivata spaziale, è denominata discretizzazione “up-wind”.*

10.4 Equazione di trasporto e diffusione

Questa equazione, nel caso più semplice, ha forma:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + vu_x(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \quad (10.39)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, \infty], \quad (10.40)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (10.41)$$

Questo modello descrive la propagazione di un'onda (termine di trasporto, o convezione) che si smorza per effetto della diffusione: $v \in \mathbb{R}$ è la velocità di propagazione dell'onda, che si dirigerà verso *destra*, se $v < 0$, o verso *sinistra*, se $v > 0$. Semi-discretizzando la derivata seconda come visto per l'equazione del calore, e la derivata prima con *up-wind*, si ottiene il sistema di equazioni ordinarie

$$\mathbf{u}'(t) = \left(\frac{1}{\Delta x^2} T_N + \frac{v}{\Delta x} L_{N-1} \right) \mathbf{u}(t) \equiv \frac{1}{\Delta x^2} (T_N - \beta L_{N-1}) \mathbf{u}(t), \text{ se } v < 0, \quad (10.42)$$

$$\mathbf{u}'(t) = \left(\frac{1}{\Delta x^2} T_N + \frac{v}{\Delta x} U_{N-1} \right) \mathbf{u}(t) \equiv \frac{1}{\Delta x^2} (T_N + \beta U_{N-1}) \mathbf{u}(t), \text{ se } v > 0, \quad (10.43)$$

dove T_N , L_{N-1} , U_{N-1} sono definite in accordo alle (10.15), (10.29), (10.37), rispettivamente, e

$$\beta = |v| \Delta x > 0. \quad (10.44)$$

Talora, $\frac{1}{2}\beta = \frac{|v|\Delta x}{2}$ è denominato *numero di Péclet di cella*, per del sistema discreto.⁴ Chiaramente, vi possono essere dei *boundary layer*, ovvero rapide variazioni della soluzione sul bordo del dominio, qualora $|v| \gg 1$, in quanto il profilo dell'onda, se non adeguatamente smorzato, deve raccordarsi con la condizione omogenea (10.41).

Considerando lo spettro dell'operatore limite

$$T - \beta L \quad \text{o} \quad T + \beta U,$$

si verifica facilmente che esso è delimitato dal *boundary locus*

$$\sigma_+ = \{ \lambda = -2 - \beta + 2 \cos \theta + \beta e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \},$$

che risulta essere un'ellisse, con asse maggiore $\Re(\lambda) \in [-4 - 2\beta, 0]$ ed asse minore $\Im(\lambda) \in [-\beta, \beta]$. Da quanto visto in Sezione 10.2, il termine diffusivo è opportuno che venga discretizzato in modo implicito, mentre quello di trasporto può essere discretizzato mediante

⁴G. Strang. *Computational Science and Engineering*, Wellesley-Cambridge Press, 2007, p. 503.

up-wind: in questo modo, utilizzando un passo spaziale $\Delta x \approx |v|\Delta t$, permette di risolvere la propagazione dell'onda, indipendentemente dal termine diffusivo:

$$\left(I_{N-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N\right) \mathbf{u}_{k+1} = \left(I_{N-1} + \frac{v\Delta t}{\Delta x} L_{N-1}\right) \mathbf{u}_k, \quad k \geq 0, \quad \text{se } v < 0, \quad (10.45)$$

$$\left(I_{N-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N\right) \mathbf{u}_{k+1} = \left(I_{N-1} + \frac{v\Delta t}{\Delta x} U_{N-1}\right) \mathbf{u}_k, \quad k \geq 0, \quad \text{se } v > 0. \quad (10.46)$$

Evidentemente, questi schemi hanno ordine 1 sia nello spazio che nel tempo. Vediamo le proprietà di stabilità della soluzione discreta. Poiché l'operatore infinto

$$T = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & & \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \alpha \geq 0$$

è invertibile con continuità e $\|T\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in \ell_1$, da (10.5) segue che $\|T^{-1}\| \leq 1$. Pertanto, per lo schema (10.45) si ottiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{k+1}\| &= \left\| \left(I_{N-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N\right)^{-1} \left(I_{N-1} + \frac{v\Delta t}{\Delta x} L_{N-1}\right) \mathbf{u}_k \right\| \\ &= \left\| \left(I_{N-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N\right)^{-1} \right\| \left\| \left(I_{N-1} + \frac{v\Delta t}{\Delta x} L_{N-1}\right) \right\| \|\mathbf{u}_k\| \\ &\leq \left(\left| 1 - \frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \right| + \left| \frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \right| \right) \|\mathbf{u}_k\| \leq \|\mathbf{u}_k\|, \end{aligned}$$

se

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}. \quad (10.47)$$

Ad analoga conclusione si perviene per lo schema (10.46), sostituendo L_{N-1} con U_{N-1} . Chiaramente, la condizione (10.47) assicura la stabilità della soluzione discreta generata da (10.45)-(10.46).

Osservazione 10.5 È interessante osservare che la condizione (10.47), che è condizione solo sufficiente per la stabilità della soluzione discreta, garantisce anche la positività della stessa, nel caso in cui $u_0(x)$ sia positiva, come si dimostra facilmente osservando che la matrice $\left(I_{N-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T_N\right)$ è una *M*-matrice. Diversamente, la soluzione discreta potrebbe avere delle oscillazioni non fisiche nel tempo. Osserviamo, infine, che la (10.47) coincide con la condizione ottenuta per lo schema *up-wind*, nel caso dell'equazione delle onde (in quel caso, infatti, si era usata la normalizzazione $|v| = 1$).

A titolo di esempio, in Figura 10.5 riportiamo la soluzione discreta generata dallo schema (10.45), utilizzato per approssimare il problema (10.39)-(10.41) con $v = -10$ e $u_0(x) = \sin(\pi x)$, utilizzando i passi:

$$\Delta x = 10^{-2}, \quad \Delta t = \Delta x/|v| = 10^{-3}, \quad (10.48)$$

che sono in accordo con la (10.47). Similmente, in Figura 10.6 riportiamo la soluzione discreta ottenuta con lo schema (10.46), utilizzato per approssimare lo stesso problema, ma con $v = 10$, e con gli stessi passi (10.48) considerati prima.

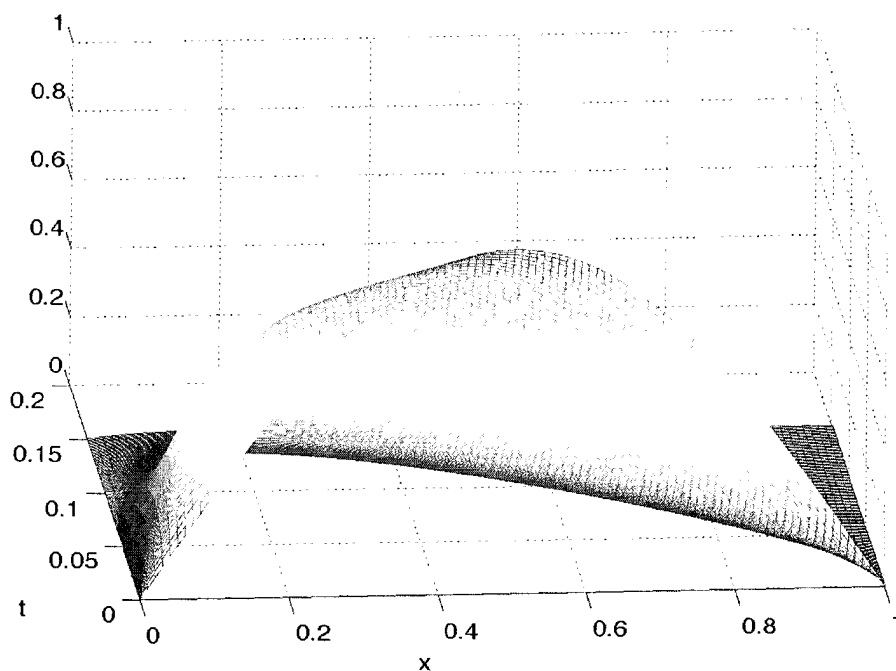


Figura 10.5: Metodo (10.45) la soluzione del problema (10.39)–(10.41), $v = -10$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, con passi $\Delta x = 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-3}$.

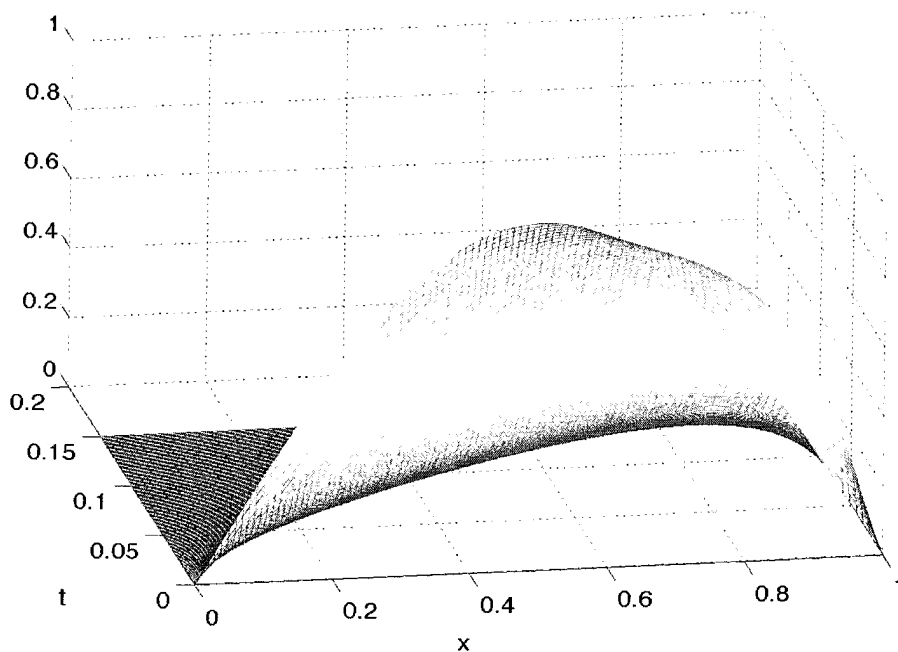


Figura 10.6: Metodo (10.46) la soluzione del problema (10.39)–(10.41), $v = 10$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, con passi $\Delta x = 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-3}$.