

## Capitolo 8

# Dai punti di equilibrio agli strani attrattori

In questo capitolo studieremo dei modelli, sia continui che discreti, che presentano strutture di equilibrio di vario tipo: da quelle più semplici, come i punti critici già esaminati in precedenza, ad orbite periodiche e, infine, *attrattori strani* che sono associati a dinamiche di tipo caotico.

### 8.1 Modello preda-predatore

Questo modello fu formulato dal matematico Vito Volterra negli anni venti del secolo scorso e, indipendentemente, dal matematico A.J. Lotka. Il primo ricevette lo spunto dalla richiesta del biologo D'Ancona relativamente ad un fenomeno osservato in natura, ovvero la diminuzione del rapporto prede/predatori nel pescato nel mare Adriatico, durante la prima guerra mondiale. Per spiegare il fenomeno, Volterra propose il seguente modello (oggi noto come *equazioni di Lotka-Volterra*). Siano, dunque:

- $x(t)$  il livello delle prede al tempo  $t$ , nell'ecosistema marino considerato;
- $y(t)$  il livello dei predatori al tempo  $t$ .

Le equazioni che regolano il loro livello saranno, quindi:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t),\end{aligned}\tag{8.1}$$

in cui i coefficienti  $a, b, c, d$  sono tutti positivi e hanno il seguente significato fisico:

- $a$ : è il tasso di riproduzione delle prede;
- $b$ : è il tasso di predazione che fa diminuire le prede;
- $c$ : è il tasso di mortalità dei predatori;
- $d$ : è il tasso di predazione che fa aumentare i predatori.

Ponendo

$$x^* = \frac{c}{d}, \quad y^* = \frac{a}{b},\tag{8.2}$$

è possibile riscrivere le (8.1) come:

$$\begin{aligned}x' &= ax \left(1 - \frac{y}{y^*}\right), \\y' &= -cy \left(1 - \frac{x}{x^*}\right),\end{aligned}\tag{8.3}$$

da cui si evince immediatamente che vi sono due punti di equilibrio:

$$A = (0, 0)^T, \quad B = (x^*, y^*)^T.$$

Dall'analisi della parte lineare per il punto  $A$ ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & \\ & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

si ottiene che l'origine è, fortunatamente, instabile (diversamente, si avrebbe l'estinzione delle due specie). Ponendo

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*,$$

per il punto  $B$ , il sistema linearizzato è invece,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} & -a\frac{x^*}{y^*} \\ c\frac{y^*}{x^*} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

per il quale l'origine è solo marginalmente stabile. Pertanto, il Teorema di Perron non è applicabile. È tuttavia possibile ricostruire l'andamento delle traiettorie nel piano delle fasi. Infatti, dalle (8.3) si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy \left(1 - \frac{x}{x^*}\right)}{ax \left(1 - \frac{y}{y^*}\right)},$$

da cui segue

$$a \left(1 - \frac{y}{y^*}\right) \frac{dy}{y} + c \left(1 - \frac{x}{x^*}\right) \frac{dx}{x} = 0.$$

Pertanto,

$$a \left(\log y - \frac{y}{y^*}\right) + c \left(\log x - \frac{x}{x^*}\right) = \kappa,$$

da cui

$$a \log y e^{-\frac{y}{y^*}} + c \log x e^{-\frac{x}{x^*}} = \kappa,$$

e, ponendo

$$\xi(y) = y e^{-\frac{y}{y^*}}, \quad \eta(x) = x e^{-\frac{x}{x^*}}, \quad K = e^\kappa,\tag{8.4}$$

segue, infine,

$$\xi^a \eta^c = K > 0,\tag{8.5}$$

che è il ramo di un'iperbole, sia essa  $\gamma(\xi, \eta)$ . Si verifica facilmente che la funzione  $\xi(y)$  ha il suo massimo (stretto) in  $y^*$  e, analogamente,  $\eta(x)$  ha il suo massimo (stretto) in  $x^*$ . Da questo si deduce che le traiettorie, nel piano delle fasi  $(x, y)$  sono curve chiuse (come si evince

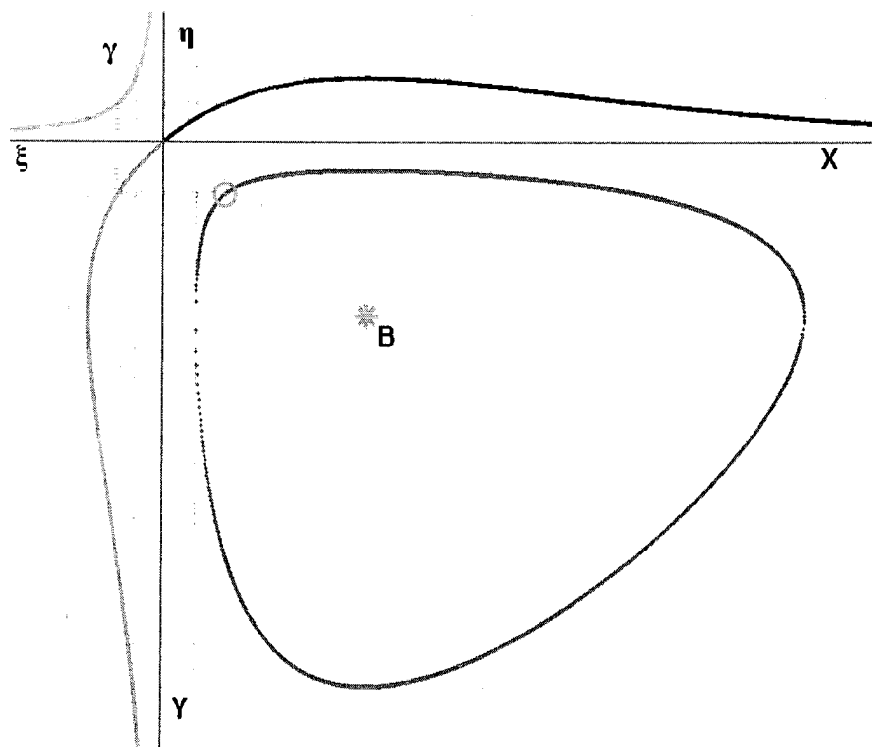


Figura 8.1: Traiettorie soluzione delle equazioni di Volterra (8.3).

dalla Figura 8.1). Pertanto, le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  saranno periodiche. Sia  $T$  il periodo dell'orbita (che dipenderà dal livello  $K$  che individua la parabola  $\gamma$ ). Per ottenere i valori medi,  $\bar{x}$ , delle prede e,  $\bar{y}$ , dei predatori in tale periodo, si procede come segue:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} ds = \frac{a}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{y(t)}{y^*}\right) dt,$$

da cui, essendo  $x(T) = x(0)$ ,

$$0 = \frac{1}{T} (\log x(T) - \log x(0)) = \frac{a}{T} T - \frac{a}{T y^*} \int_0^T y(t) dt.$$

Pertanto,

$$\bar{y} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = y^* = \frac{a}{b}. \quad (8.6)$$

Procedendo in maniera analoga, si ottiene che

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = x^* = \frac{c}{d}. \quad (8.7)$$

Se adesso introduciamo nel modello (8.3) l'effetto della pesca, si deduce facilmente che questa si concretizzerà nella sottrazione di una percentuale uguale, sia essa  $\varepsilon$ , di prede e predatori. In questo caso, si ottiene che le (8.1) divengono:

$$\begin{aligned} x' &= (a - \varepsilon)x - bxy = a(\varepsilon)x \left(1 - \frac{y}{y^*(\varepsilon)}\right), \\ y' &= -(c + \varepsilon)y - dxy = -c(\varepsilon)y \left(1 - \frac{x}{x^*(\varepsilon)}\right), \end{aligned} \quad (8.8)$$

dove si è posto (confrontare con (8.2):

$$a(\varepsilon) = a - \varepsilon, \quad c(\varepsilon) = c + \varepsilon, \quad x^*(\varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{d}, \quad y^*(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{b}.$$

Poichè (vedi (8.6) e (8.7))  $x^*(\varepsilon)$  e  $y^*(\varepsilon)$  rappresentano il numero medio di prede e predatori, si ottiene che il rapporto tra prede e predatori è dato, in media, da

$$\frac{x^*(\varepsilon)}{y^*(\varepsilon)} = \frac{c(\varepsilon)b}{a(\varepsilon)d},$$

che è una funzione crescente di  $\varepsilon$ , per  $\varepsilon \gtrsim 0$ . Questo spiega, pertanto, il fenomeno osservato dal biologo D'Ancona.

**Osservazione 8.1** *Chiaramente, se l'attività di pesca, quantificata da  $\varepsilon$ , diviene troppo grande,  $a(\varepsilon) = a - \varepsilon$  diviene negativo, e si ha un disastro ecologico. Infatti, in tal caso, l'origine diviene asintoticamente stabile, e si ha l'estinzione delle due specie.*

**Osservazione 8.2** *Osserviamo che il modello (8.1) può essere utilizzato anche nella modellizzazione del mercato del lavoro, modificando il significato fisico delle variabili di stato come segue:*

- $x(t)$  denota il numero di disoccupati al tempo  $t$ ;
- $y(t)$  denota il capitale di investimento al tempo  $t$ .

È infatti noto che l'economia è soggetta a cicli economici, che sono contemplati da questo modello.

È interessante osservare che (vedi (8.4)), essendo le funzioni  $\xi(y)$  e  $\eta(x)$  strettamente monotone, prima e dopo i rispettivi massimi, allora la funzione

$$V(x, y) = \xi(y)^{-c} \eta(x)^{-a} - \xi(y^*)^{-a} \eta(x^*)^{-c}$$

ha le seguenti caratteristiche:

- $V(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y > 0$ ;
- $V(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x^*, y = y^*$ ;
- $V(x, y) \rightarrow \infty$  se  $(x, y)$  tende a  $\infty$  o alla frontiera del primo quadrante.

Pertanto,  $V(x, y)$  potrebbe essere candidata ad essere una funzione di Lyapunov. Inoltre, le sue curve di livello sono, evidentemente, curve chiuse. Tuttavia, risulta aversi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial}{\partial \xi} V(x, y) \frac{d}{dy} \xi(y) y' + \frac{\partial}{\partial \eta} V(x, y) \frac{d}{dx} \eta(x) x' \\ &= -ac \xi(y)^{-1-a} \eta(x)^{-c} y e^{-\frac{y}{y^*}} \left(1 - \frac{y}{y^*}\right) \left(1 - \frac{x}{x^*}\right) \\ &\quad + ca \xi(y)^{-a} \eta(x)^{-1-c} x e^{-\frac{x}{x^*}} \left(1 - \frac{x}{x^*}\right) \left(1 - \frac{y}{y^*}\right) = 0. \end{aligned}$$

Da questo, evidentemente, non si può dedurre l'asintotica stabilità del punto di equilibrio  $(x^*, y^*)$ . Tuttavia, si evince come  $V(x, y)$  sia un *invariante* del moto. Pertanto le soluzioni giaceranno sulla curva di livello

$$V(x, y) = V(x(0), y(0))$$

che, come detto innanzi, sono curve chiuse.

## 8.2 Le equazioni di Lorenz

Fin dalla fine degli anni '50 del secolo scorso, si erano osservati comportamenti di tipo aperiodico che scaturivano da modelli per le previsioni meteorologiche. Si trattava, tuttavia, di modelli di grandi dimensioni, difficili da studiare dal punto di vista matematico. Per poter ottenere dei modelli più semplici, ai fini della loro analisi, si pensò di studiare e modellizzare fenomeni di termoconvezione dei fluidi, per poi estrapolarne i risultati all'interpretazione dei fenomeni atmosferici. Fu proprio in quel periodo che il matematico e meteorologo E.N. Lorenz, a quei tempi al M.I.T., ottenne una soluzione aperiodica da un modello di 7 equazioni differenziali da lui formulato. In questa soluzione, 4 delle componenti erano a livello nullo e, pertanto, pensò di semplificare ulteriormente il modello, sperando di ottenere

soluzioni aperiodiche dalle equazioni per le rimanenti 3 variabili non nulle. L'idea fu buona, e Lorenz ottenne le sue, ormai famose, equazioni:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x), \\y' &= \rho x - y - xz, \\z' &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{8.9}$$

in cui  $\sigma, \rho, \beta > 0$  sono *parametri modulatori* per la dinamica. In particolare, esamineremo i seguenti valori degli stessi:

$$\sigma = 10, \quad \beta = \frac{8}{3}, \quad \rho > 0,\tag{8.10}$$

che sono sufficienti ad illustrare la grande ricchezza dinamica di queste equazioni. Quindi, ai fini della nostra analisi, il solo parametro modulatore della dinamica è il parametro  $\rho > 0$ .

### 8.2.1 Punti di equilibrio

Le equazioni (8.9) ammettono l'origine,  $O$ , come punto di equilibrio e, per  $\rho \geq 1$ , anche i punti

$$C_{1/2} = \left( \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right)^T.\tag{8.11}$$

Evidentemente,  $C_1 = C_2 = O$ , per  $\rho = 1$ . Osserviamo che gli ultimi due punti di equilibrio evidenziano la seguente *simmetria* delle equazioni:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -x & -y & z \end{pmatrix},\tag{8.12}$$

presente per ogni valore dei parametri. Riguardo alle proprietà di stabilità dei punti di equilibrio si ottiene, mediante l'analisi di stabilità in prima approssimazione, che:

- l'origine è asintoticamente stabile per  $0 < \rho < 1$ , che diviene instabile per  $\rho > 1$ ;
- gli autovalori del flusso linearizzato in  $C_{1/2}$  sono le radici del polinomio

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + \beta + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\sigma\beta(\rho - 1),$$

che risultano essere a parte reale negativa, tenendo conto di (8.10), per

$$1 < \rho < \rho^* \equiv \frac{\sigma(\beta + \sigma + 3)}{\sigma - \beta - 1} = \frac{470}{19} \approx 24.74.$$

### 8.2.2 Insieme invariante e strano attrattore

Quindi, per  $\rho > \rho^*$ , nessuno dei punti di equilibrio risulta essere asintoticamente stabile. Nondimeno, esiste un insieme invariante limitato che le traiettorie raggiungono in un tempo finito, che si ottiene considerando la seguente funzione di Lyapunov:

$$V(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}V'(x, y, z) &= 2\rho x x' + 2\sigma y y' + 2\sigma(z - 2\rho) z' \\ &= 2\rho x \sigma(y - x) + 2\sigma y(\rho x - y - xz) + 2\sigma(z - 2\rho)(xy - \beta z) \\ &= -2\sigma(\rho x^2 + y^2 + \beta z^2 - 2\beta \rho z).\end{aligned}$$

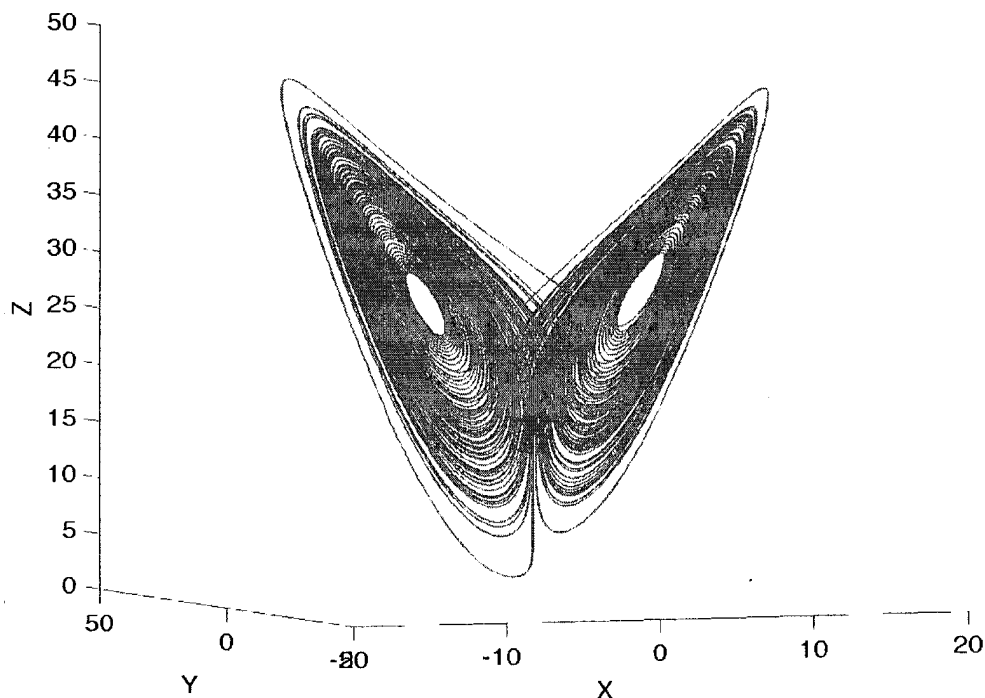


Figura 8.2: Strano attrattore per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 28$ , nello spazio delle fasi.

Chiaramente, la regione

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) : V'(x, y, z) \geq 0\}$$

è chiusa e limitata. Sia, dunque

$$C = \max_{(x,y,z) \in \mathcal{D}} V(x, y, z),$$

e consideriamo l'ellissoide limitato, sia esso  $\mathcal{E}$ , in cui  $V(x, y, z) \leq C + \varepsilon$ , per un  $\varepsilon > 0$  fissato. Pertanto, se  $(x, y, z) \notin \mathcal{E}$ , si avrà

$$V'(x, y, z) \leq -\delta(\varepsilon) < 0$$

e, pertanto, in un tempo

$$\tau \leq \frac{V(x(0), y(0), z(0)) - C - \varepsilon}{\delta(\varepsilon)},$$

la traiettoria entrerà in  $\mathcal{E}$ , per non uscirne più. È interessante osservare che questo avviene per ogni valore del parametro  $\rho$  e, pertanto, per  $\rho < \rho^*$  la dinamica risulta essere, semplicemente, attratta verso uno dei punti critici (ce n'è sempre uno asintoticamente stabile, in questo *range* di valori di  $\rho$ ).

Per  $\rho > \rho^*$ , la dinamica diviene più complessa. Ad esempio, per  $\rho = 28$ , la struttura di equilibrio, che risulta essere asintoticamente stabile, è un cosiddetto *attrattore strano*, raffigurato in Figura 8.2 e Figura 8.3, in cui si vede come le traiettorie descrivano un insieme dalla topologia assai complessa. In effetti, si può dimostrare che la sua dimensione<sup>1</sup> non

<sup>1</sup>In effetti, la sua cosiddetta dimensione di Hausdorff.

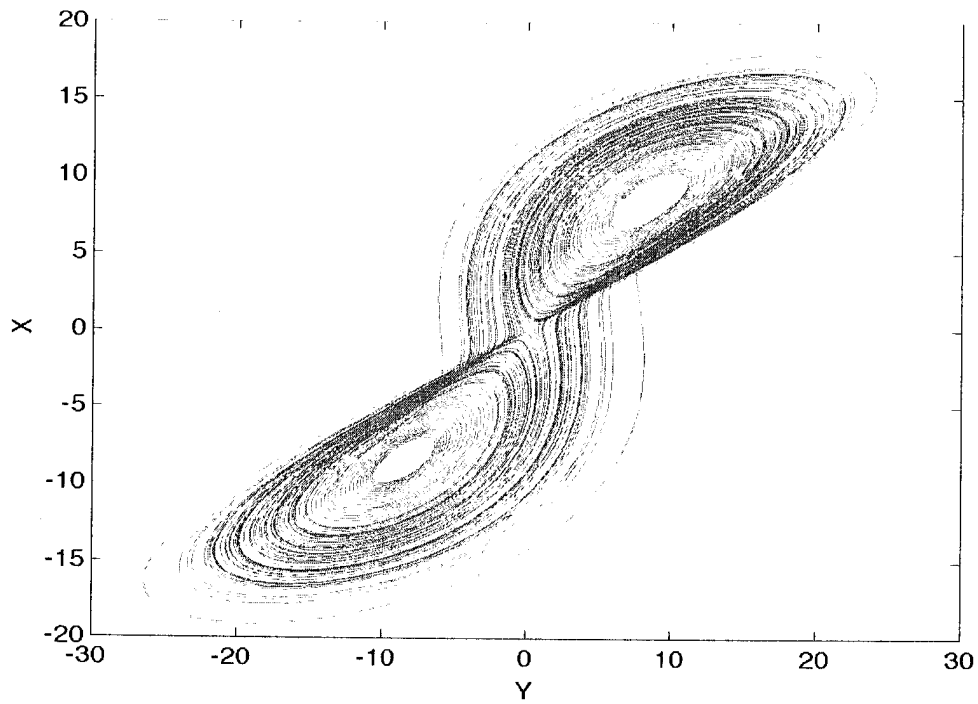


Figura 8.3: Strano attrattore per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 28$ , proiezione sul piano  $(x, y)$ .

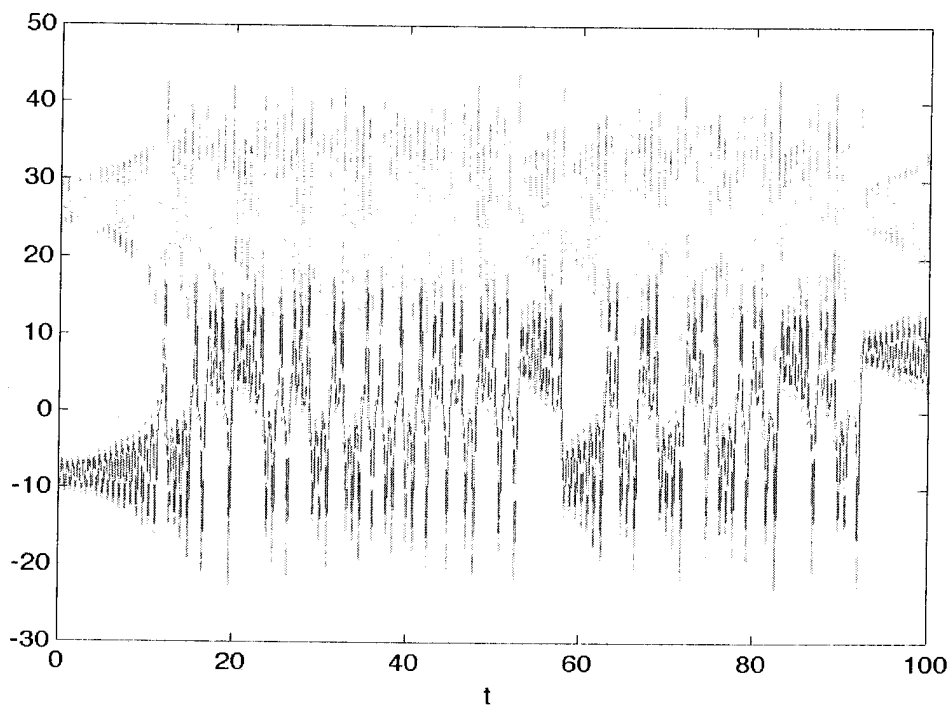


Figura 8.4: Strano attrattore per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 28$ .



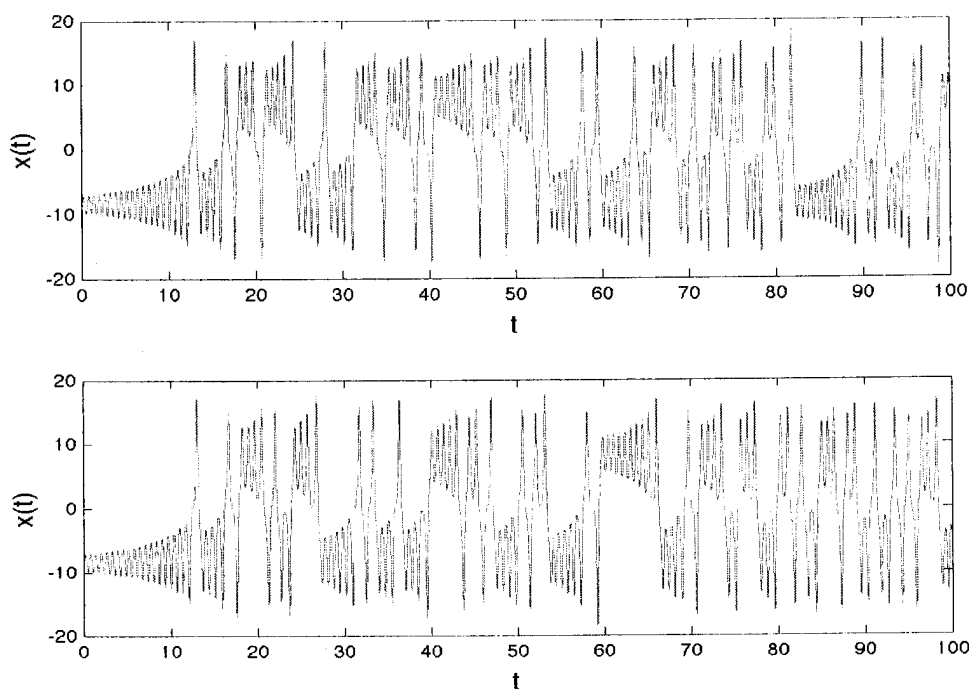


Figura 8.5: Traiettorie per  $x(t)$ , con punto iniziale  $(1, 1, 1)$  (in alto) e  $(1.0001, 1, 1)$  (in basso), per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 28$ .

è intera, ma si tratta di un oggetto *frattale*. Questo fa sì che sia difficile seguire puntualmente, anche numericamente, una traiettoria che giace sullo strano attrattore, perché essa ha una dinamica poco prevedibile, come evidenziato in Figure 8.4, e piccole perturbazioni sui dati iniziali portano a traiettorie completamente diverse, se graficate rispetto al tempo, ma qualitativamente simili, se visualizzate nel piano delle fasi. Ad esempio, perturbando la condizione iniziale della precedente traiettoria,  $(1, 1, 1)$  in  $(1.0001, 1, 1)$ , produce un grafico, nello spazio delle fasi, del tutto simile a quello delle Figure 8.2 e 8.3. Tuttavia, puntualmente le traiettorie differiscono sostanzialmente, come si evince per  $x(t)$ , raffigurata in Figura 8.5. Una dinamica di questo tipo è infatti denominata *caotica* (in senso matematico), ed è caratterizzata da una cosiddetta *sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali*. Quindi, quando la dinamica è in regime caotico, non è più possibile fare previsioni puntuali. I fenomeni in tale regime dinamico sono quindi difficili da prevedere: questo è il motivo, ad esempio, per cui non è possibile fare previsioni meteorologiche a lungo termine (in genere oltre 5 giorni) oppure sia difficile dosare, dal punto di vista farmacologico, un malato Parkinsoniano. Infatti, i due precedenti esempi costituiscono fenomeni con dinamica caotica.

### 8.2.3 Finestre di raddoppio del periodo e transizione al caos

Le equazioni di Lorenz possiedono strutture di equilibrio asintoticamente stabili differenti da quelle viste in precedenza. In effetti, abbiamo visto che si va verso una dinamica caotica, per valori crescenti del parametro  $\rho$ , procedendo da punti di equilibrio asintoticamente stabili (l'origine,  $C_1$  e  $C_2$ , visti innanzi). Questa dinamica caotica si mantiene in un *range* del

parametro  $\rho$  che va da  $\rho > \rho^*$  a circa  $\rho = 99$ . Per valori più elevati del parametro, si osservano delle orbite periodiche, che sono asintoticamente stabili. In particolare, le orbite periodiche si “avvolgono” attorno ai punti di equilibrio (8.11), in quanto le traiettorie saranno sempre contenute, dopo un tempo finito, in un insieme invariante limitato, come visto sopra. Per distinguere le varie orbite periodiche, denoteremo con  $x$  un “avvolgimento” intorno a  $C_1$  e con  $y$  un “avvolgimento” intorno a  $C_2$ . Per  $99.98 \lesssim \rho \lesssim 100.795$  esiste un’orbita periodica asintoticamente stabile di tipo  $x^2y$  (e la sua simmetrica, vedi (8.12),  $xy^2$ ), come raffigurato in Figura 8.6. Non appena questa orbita diviene instabile, al decrescere di  $\rho$ , diviene asintoticamente stabile un’orbita di periodo doppio, di tipo  $(x^2y)^2$ , come si può vedere in Figura 8.7, per  $\rho = 99.9$ . Per  $\rho \rightarrow 99.98_-$ , i doppi *loop* di quest’orbita coalescono, per dare, al valore di biforcazione  $\approx 99.98$ , l’orbita  $x^2y$  stabile per valori più grandi di  $\rho$ . L’orbita  $(x^2y)^2$  (e la sua simmetrica  $(xy^2)^2$ ) risultano essere stabili per  $99.629 \lesssim \rho \lesssim 99.98$ . Subito sotto il valore inferiore, queste due orbite divengono instabili, a favore della coppia, di periodo raddoppiato,  $(x^2y)^4$  e  $(xy^2)^4$ , che risulta essere stabile per  $99.547 \lesssim \rho \lesssim 99.629$ . Si parla, in questo caso, di *biforcazione per raddoppio del periodo*. Di queste biforcazioni, ne esiste una *casata* infinita, che si accumula alla destra di un valore limite  $\rho_\infty \approx 99.524$ . Inoltre, denotando con  $\rho_n$  il valore di biforcazione in cui si passa dall’orbita  $(x^2y)^{2(n+1)}$  a quella di tipo  $(x^2y)^{2n}$ ,  $n \geq 0$ , è stato verificato sperimentalmente che il rapporto

$$\frac{\rho_{n-1} - \rho_n}{\rho_n - \rho_{n+1}} \rightarrow \delta \approx 4.67, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8.13)$$

dove il numero  $\delta$  è uno dei cosiddetti *numeri di Feigenbaum*, che sembrano caratterizzare la transizione verso un regime caotico. Quindi, alla destra di  $\rho_\infty$ , si accumulano infinite orbite periodiche stabili del tipo  $(x^2y)^{2n}$  anche se è molto difficile stabilire quella esatta, per un dato valore del parametro  $\rho \in (\rho_\infty, \rho_0)$ . Di queste finestre di raddoppio del periodo ve ne sono molte altre. Ad esempio, per  $\rho \in (145, 154.4)$  esistono le casate di raddoppio del periodo dell’orbita  $x^2y^2$ , raffigurata in Figura 8.8, per  $\rho = 148.5$ . Anche ora, per  $\rho \approx 148.2$ , si ha una biforcazione per raddoppio del periodo, alla sinistra del quale, diviene stabile l’orbita  $(x^2y^2)^2$ , raffigurata in Figura 8.9, per  $\rho = 147.5$ . Le finestre di raddoppio del periodo del tipo  $(x^2y^2)^{2n}$ , si accumulano alla destra di un valore limite  $\approx 145$ , come detto innanzi. Infine, tra due finestre di raddoppio del periodo, in cui le orbite periodiche per valori più grandi di  $\rho$  esistono ancora, ma sono tutte instabili, il comportamento della dinamica è di tipo turbolento. Si è talora parlato di *caos intermittente*, perchè le traiettorie appaiono apparentemente periodiche, salvo “esplodere” in modo non predicibile, andando verso un diverso periodo.

### 8.3 L’equazione logistica

In questa sezione consideriamo due modelli di popolazione, apparentemente assai semplici, prima in veste continua e, successivamente, in veste discreta: si tratta dell’equazione logistica, o modello di Verhulst. Vedremo che, dal punto di vista della ricchezza dinamica, la versione discreta sia assai più ricca e, pertanto, il loro utilizzo non è generalmente interscambiabile. Questo significa che la scelta del modello discreto, invece che continuo, ha delle implicazioni non trascurabili che, in effetti, hanno spiegato fenomeni realmente osservati in natura.

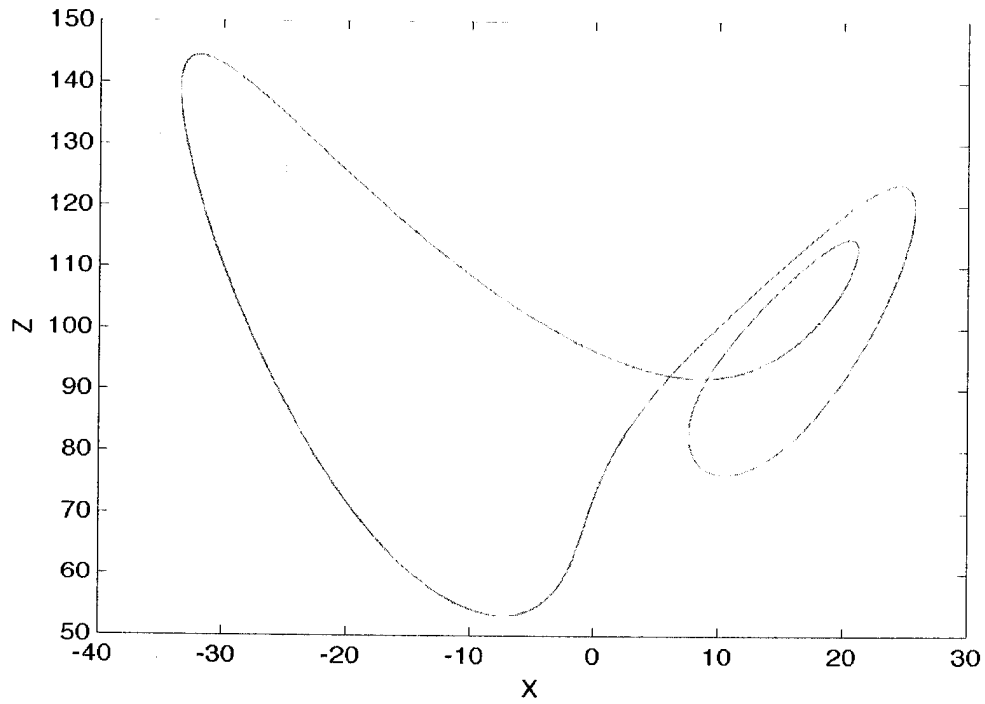


Figura 8.6: Orbita periodica  $x^2y$  per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 100$ .

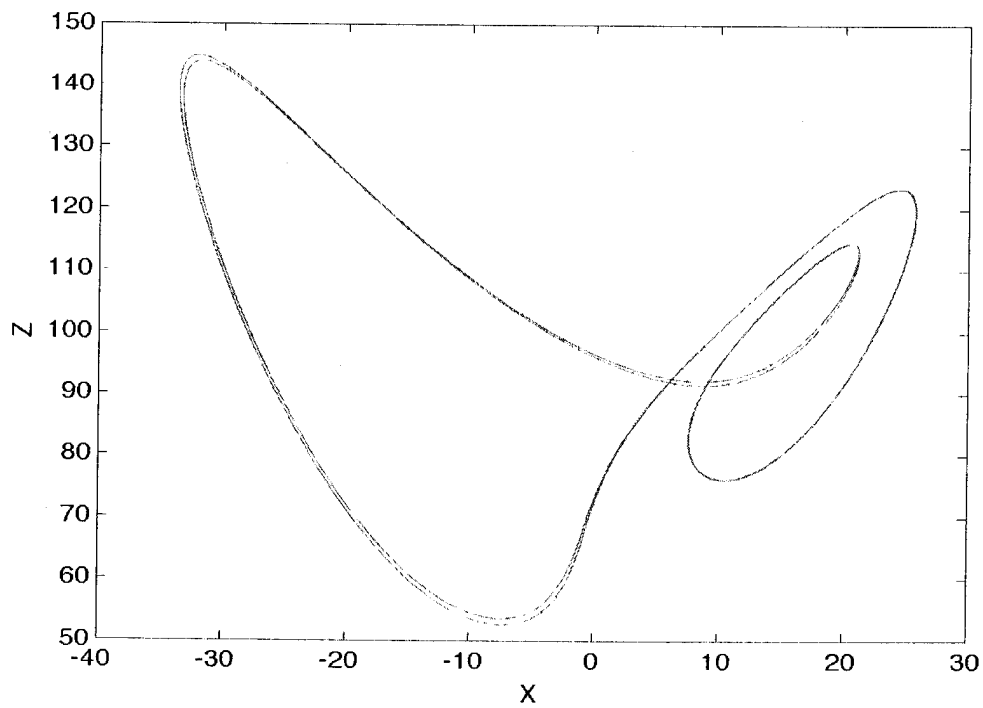


Figura 8.7: Orbita periodica  $(x^2y)^2$  per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 99.9$ .

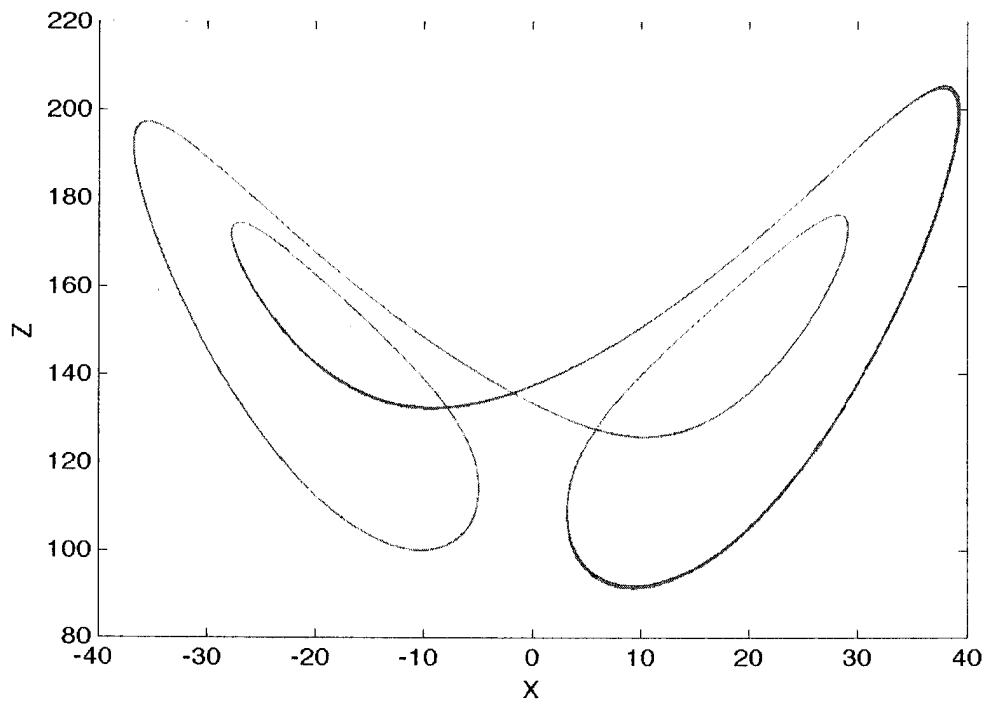


Figura 8.8: Orbita periodica  $x^2y^2$  per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 148.5$ .

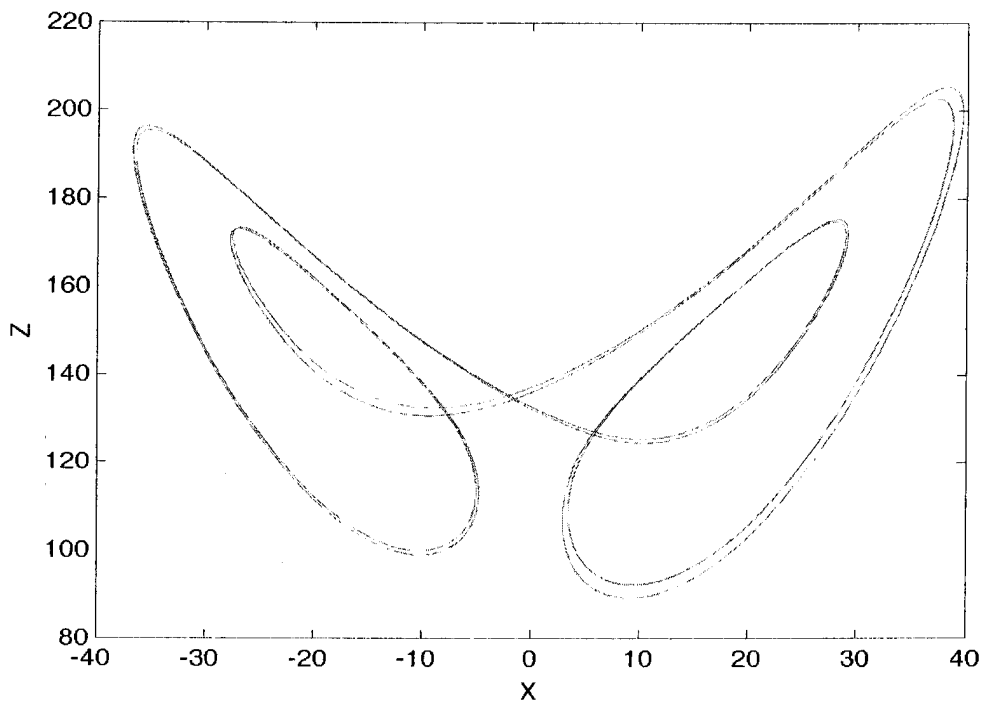


Figura 8.9: Orbita periodica  $(x^2y^2)^2$  per le equazioni di Lorenz (8.9),  $\rho = 147.5$ .

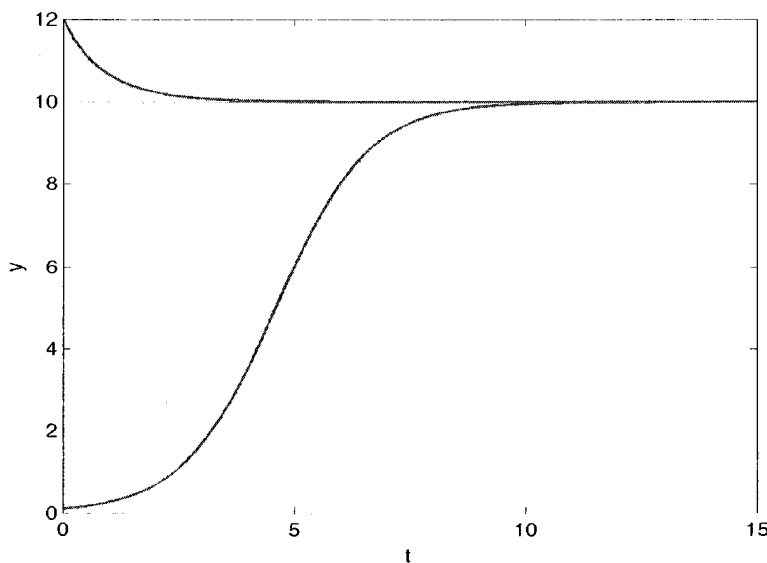


Figura 8.10: Equazione logistica continua.

### 8.3.1 Il caso continuo

Indicando con  $y(t)$  la popolazione al tempo  $t$ , possiamo modellarne la crescita tramite l'equazione differenziale

$$y' = ay - by^2 \equiv ay \left( 1 - \frac{y}{y^*} \right), \quad y^* = \frac{a}{b},$$

in cui  $a, b > 0$  denotano, rispettivamente, il tasso di crescita della popolazione e la competizione per le risorse ambientali. I punti di equilibrio, in questo caso, sono evidentemente l'origine e  $y^*$ . Lo studio della parte lineare, ci dice che essa è (fortunatamente) instabile. Riguardo a  $y^*$ , si ha che la parte lineare del sistema linearizzato in  $y^*$  è invece negativa ( $-a$ ) e, pertanto, asintoticamente stabile. In effetti, si verifica facilmente che la soluzione del modello è esplicitamente data da

$$y(t) = \frac{y^* y(t_0) e^{a(t-t_0)}}{y^* + y(t_0)(e^{a(t-t_0)} - 1)}, \quad t \geq t_0.$$

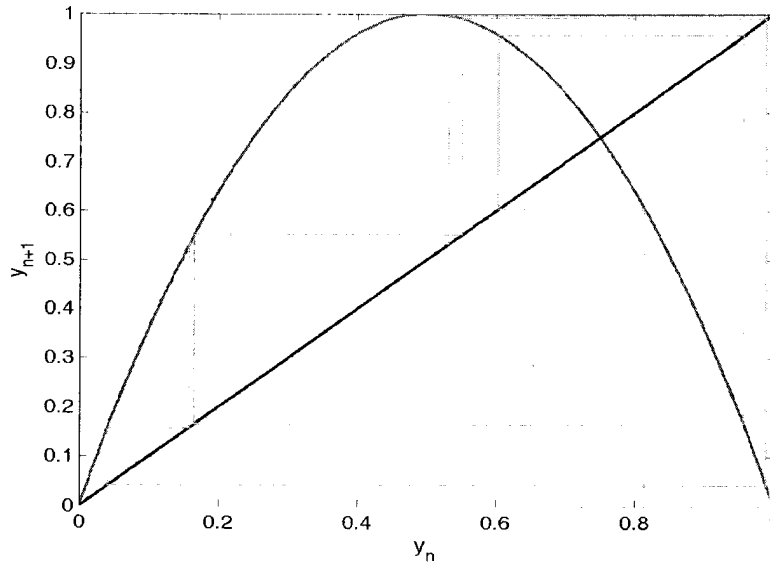
Pertanto, se  $y(t_0) > 0$  (come è ovvio che sia), allora  $y(t) \rightarrow y^*$ , per  $t \rightarrow \infty$ , come si evince anche da Figura 8.12. In questo caso,  $y^*$  rappresenta la massima popolazione che può essere sostenuta dalle risorse ambientali, ed il termine

$$1 - \frac{y}{y^*}$$

è denominato *resistenza ambientale alla crescita*.

### 8.3.2 Il caso discreto

Per alcuni tipi di popolazioni, non si può assumere che il tempo vari con continuità. Ad esempio, per popolazioni di insetti con ciclo di riproduzione stagionale, le cui generazioni

Figura 8.11: Equazione logistica discreta,  $a = 4$ .

non si sovrappongono. In questo caso, è sempre portare l'equazione nella forma

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n), \quad n \geq 0, \quad y_0 > 0. \quad (8.14)$$

Infatti, se avessimo, come nel caso continuo,

$$x_{n+1} = ax_n \left( 1 - \frac{b}{a}x_n \right), \quad n \geq 0,$$

la trasformazione  $y_n = \frac{b}{a}x_n$  porterebbe alla (8.14). Questa normalizzazione, fa sì che la successione  $\{y_n\}$  sia non negativa, e per la precisione nell'intervallo  $[0, 1]$ , se e solo se

$$a \in [0, 4].$$

Infatti, come si evince da Figura 8.11, in questo *range* di valori del parametro  $a$ , l'intervallo  $[0, 1]$  è invariante. Pertanto, si tratta di discutere la dinamica della (8.14) per  $0 \leq a \leq 4$ . Ricercando i punti di equilibrio della (8.14), ovvero  $\bar{x}$  tale che

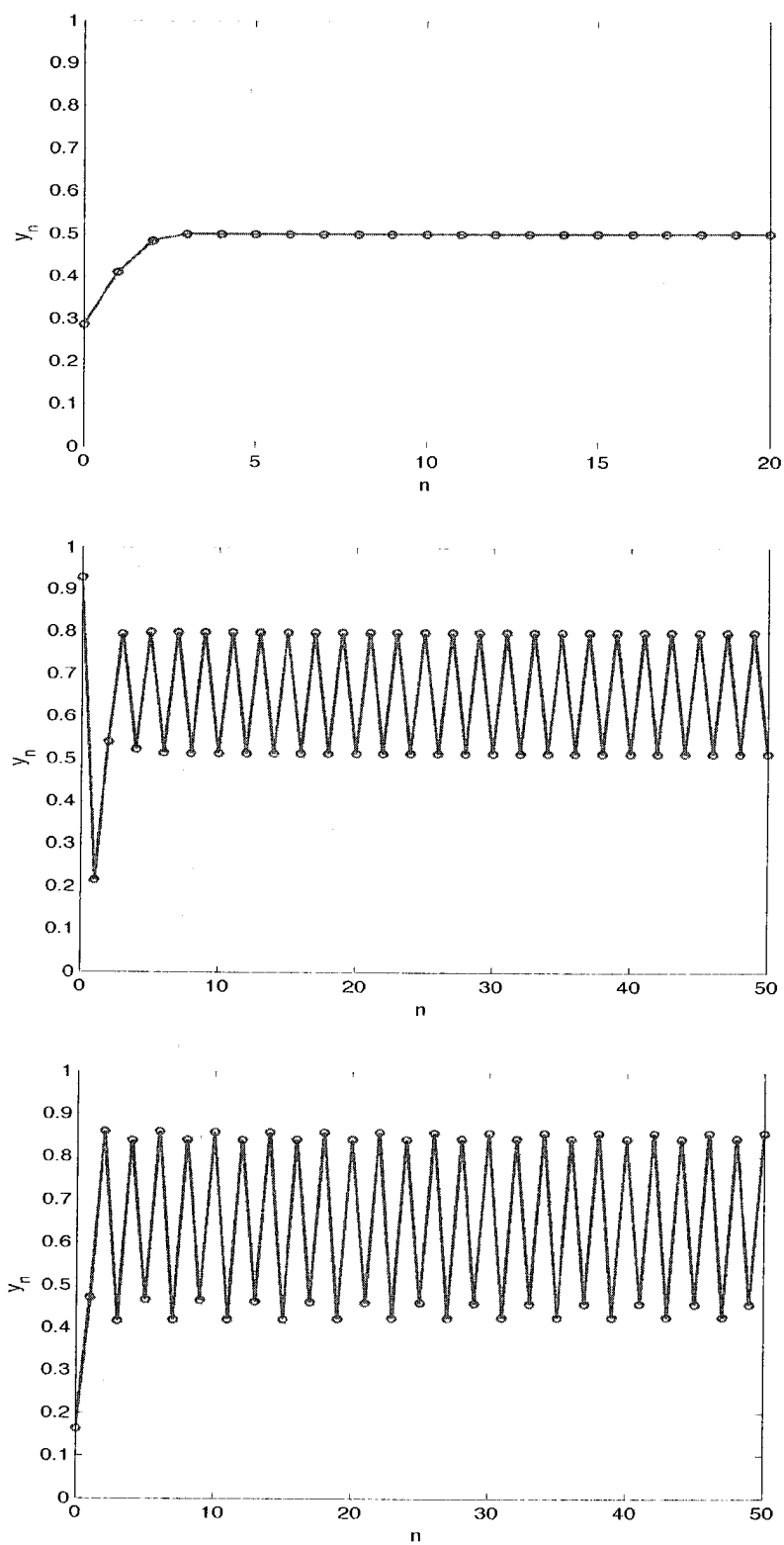
$$\bar{x} = a\bar{x}(1 - \bar{x}),$$

si ottiene

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \frac{a-1}{a}. \quad (8.15)$$

Studiando la parte lineare della (8.14) nell'origine, si ottiene che questa è asintoticamente stabile se  $0 \leq a < 1$ . In questo *range* di valori di  $a$ , il secondo punto di equilibrio non è ammissibile, in quanto negativo. Per  $a = 1$  i due punti di equilibrio coincidono e, per  $a > 1$  l'origine diviene instabile a favore dell'altro punto di equilibrio. Ponendo  $z_n = y_n - \bar{x}$ , si ottiene, considerando la parte lineare dell'equazione linearizzata,

$$z_{n+1} = z_n(2 - a), \quad n \geq 0.$$

Figura 8.12: Equazione logistica discreta,  $a = 2, 3.2, 3.45$ , procedendo dall'alto in basso.

Pertanto,

$$\bar{x} = \frac{a-1}{a}$$

sarà asintoticamente stabile se  $|2-a| < 1$ , ovvero per  $1 < a < 3$ . Questo si vede raffigurato nel grafico in alto in Figura 8.12, relativo ad  $a = 2$ . Per  $a > 3$ ,  $\bar{x}$  diviene instabile. Non appena questo avviene, diventa stabile un ciclo di periodo 2 (vedi il grafico centrale in Figura 8.12, ottenuto per  $a = 3.2$ ) che, al crescere del parametro  $a$ , diviene instabile a favore di un periodo 4, inizialmente stabile (vedi grafico in basso in Figura 8.12, relativo ad  $a = 3.45$ ). Questo diviene a sua volta instabile, al crescere del valore del parametro  $a$ , dando origine, non appena ciò avviene, ad un ciclo di periodo 8 e, quindi ad una cascata di raddoppi del periodo,  $16, 32, 64, \dots, 2^n, \dots$ , tutti inizialmente stabili: non appena il generico ciclo di periodo  $2^n$  diviene instabile, diviene stabile un ciclo di periodo  $2^{n+1}$ . Tutte queste orbite periodiche, si accumulano alla sinistra di un valore limite,  $a_\infty \approx 3.57$ . Per  $a > a_\infty$  tutte le orbite periodiche di periodo  $2^n$ ,  $n \geq 0$ , esistono ancora, ma sono instabili. È interessante osservare che, denominato con  $a_n$  il valore del parametro  $a$  in cui l'orbita di periodo  $2^n$  diviene instabile a favore di una di periodo  $2^{n+1}$ , allora il rapporto

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \rightarrow \delta \approx 4.67, \quad n \rightarrow \infty,$$

dove  $\delta$  è lo stesso numero di Feigenbaum visto nella (8.13)!<sup>2</sup> Per  $a > a_\infty$  compaiono orbite stabili di periodo dispari, ciascuna originante una corrispondente cascata di raddoppi del periodo, che si accumula ad un diverso valore del parametro  $a$ . In particolare, per  $a \approx 3.8284$ , compare un'orbita periodica di periodo 3, che rimane stabile per un breve intervallo di valori del parametro  $a$  (si veda il grafico in alto in Figura 8.13, ottenuta per  $a = 3.83$ ). Un'orbita di periodo 3, per una mappa unimodale come quella logistica, è condizione sufficiente perché si abbia "caos".<sup>3</sup> Quando ciò avviene, infatti, la mappa discreta possiede:

1. un ciclo di periodo  $n$ , per ogni  $n \geq 1$ ;
2. un insieme non numerabile di punti, le traiettorie per i quali sono del tutto aperiodiche ed instabili (Li e Yorke denominano l'insieme di queste orbite *scrambled set*).

Per  $a = 4$ , infine, le traiettorie sono del tutto ergodiche (si veda il grafico in basso, in Figura 8.13), tant'è che è possibile dimostrare che la densità dei punti su di essa ha una distribuzione di probabilità data da

$$h(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}, \quad y \in (0, 1).$$

Per concludere, in Figura 8.14 riportiamo il diagramma di biforcazione al variare del parametro  $a$ , per la (8.14).

**Osservazione 8.3** È degno di nota il fatto che la scoperta di questa complessità dell'equazione logistica (8.14) ha permesso di dare una spiegazione scientifica all'andamento molto fluttuante di alcune popolazioni di insetti con ciclo di riproduzione stagionale. Prima di questo, il fenomeno appariva del tutto incomprensibile.<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Più esattamente,  $\delta = 4.6692016091029\dots$

<sup>3</sup>T.-Y. Li, J.A. Yorke. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly* **82**, no. 10 (1975) 985-992.

<sup>4</sup>R. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261** (1976) 459-67.



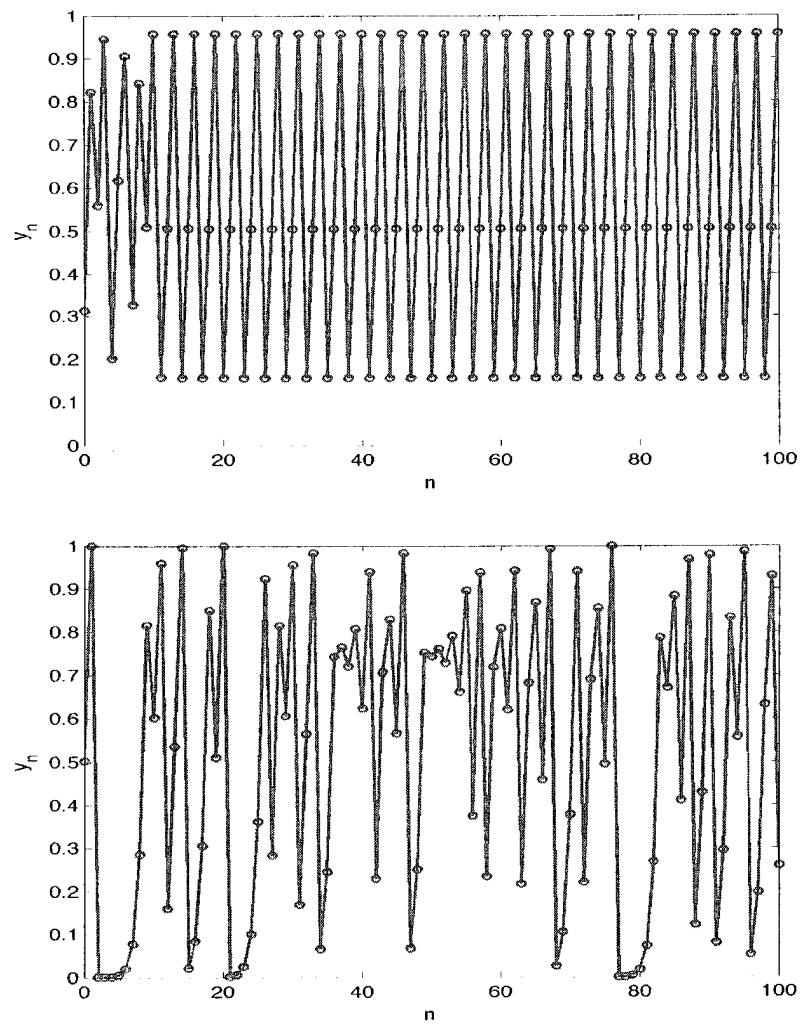


Figura 8.13: Equazione logistica discreta,  $a = 3.83, 4$ , procedendo dall'alto in basso.

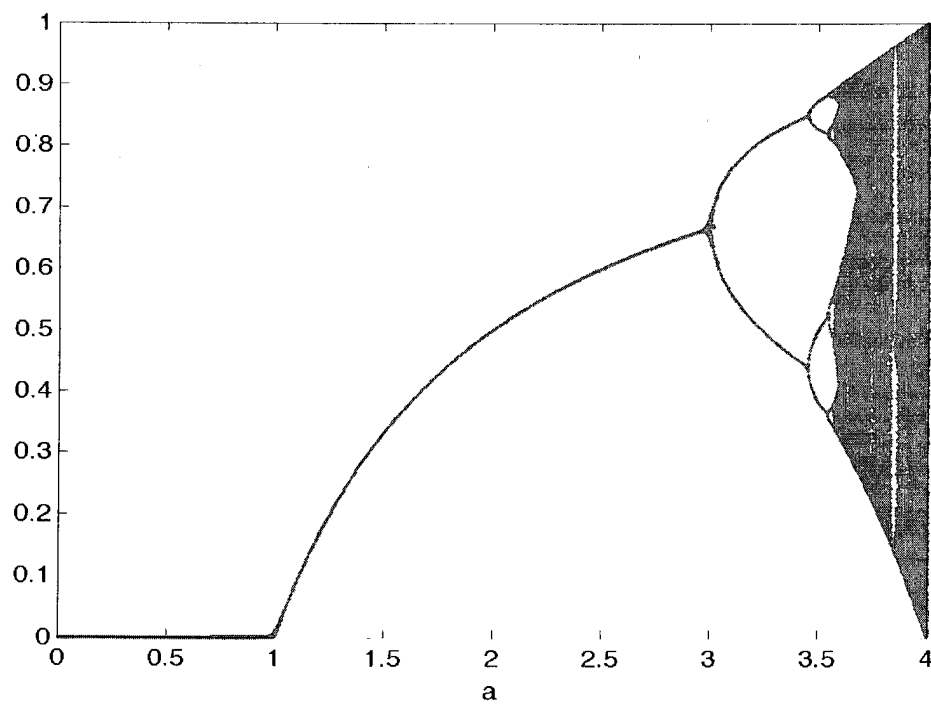


Figura 8.14: Diagramma di biforcazione per l'equazione logistica discreta.