Capitolo 5

Funzioni di matrici

Lo studio dei sistemi lineari di equazioni alle differenze e differenziali, richiede l'introduzione di un importante strumento metodologico: le funzioni di matrici. Nel seguito, pertanto, cercheremo di dare un senso alla scrittura $f(A)$, essendo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ed A matrice quadrata di dimensione $\bar{m}$. Cominciamo con il caso, assai più semplice, in cui $f(z) \equiv p(z) \in \Pi_k$:

$$p(z) = \sum_{i=0}^{k} p_i z^i.$$

In tal caso, si ha:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{k} p_i A^i \in \mathbb{C}^{\bar{m}\times\bar{m}}.$$

Inoltre, se $\lambda \in \sigma(A)$, lo *spettro* di A, con autovettore $\mathbf{v}$, ovvero

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

allora è facile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 5.1 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \;\Rightarrow\; p(A)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$. *Pertanto,* $\lambda \in \sigma(A) \;\Rightarrow\; p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.

Tuttavia, vi sono alcune differenze fondamentali tra i polinomi di una variabile ed i polinomi di matrice. Infatti è se $z \in \mathbb{C}$, allora $z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z^n \neq 0,\; n \geq 0$. Per le matrici, questo può non essere vero. Infatti, per esempio, denotando con O la matrice nulla, [1]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \qquad \text{ma} \qquad A^2 = O.$$

Più in generale, vale il seguente risultato.

Teorema 5.2 (di Cayley-Hamilton) *Sia* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *il* polinomio caratteristico *di* A. *Allora,* $p(A) = O$.

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

[1] La sua dimensione sarà sempre deducibile dal contesto.

allora $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Quindi:

$$p(A) = (A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Supponiamo, ora che il *polinomio caratteristico* di A sia

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} (\lambda - \lambda_i)^{\bar{m}_i}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ se } i \neq j, \tag{5.1}$$

ovvero $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu\}$ sono gli autovalori distinti di A aventi *molteplicità algebrica*, rispettivamente $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_\nu$. Dal Teorema 5.2, segue che esiste un polinomio monico di grado

$$\sum_{i=1}^{\nu} \bar{m}_i = \bar{m} \equiv \deg(p)$$

che, calcolato in A, vale la matrice nulla. Pertanto ha senso definire il *polinomio minimale* (o *minimo*) di A, sia esso $\psi(z)$, come il polinomio monico di grado minimo che si annulla in A. Segue quindi che

$$m \equiv \deg(\psi) \leq \bar{m}.$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 5.3 *Ogni radice di $p(z)$ è radice di $\psi(z)$, e viceversa.*

Dimostrazione. Poiché $m \leq \bar{m}$, è possibile dividere $p(z)$ per $\psi(z)$, ottenendo:

$$p(z) = q(z)\psi(z) + r(z),$$

con $\deg(r) < m$. Poiché $p(A) = \psi(A) = O$, segue che $r(A) = O$ e, pertanto, $r(z) \equiv 0$ perché, diversamente, si avrebbe $\deg(r) \geq m$, essendo $\psi(z)$ il polinomio minimale. Quindi, ogni radice di $\psi(z)$ è radice di $p(z)$. Sia ora λ un autovalore di A con autovetture $\mathbf{v}$. Pertanto, $p(\lambda) = 0$ e $A^j\mathbf{v} = \lambda^j\mathbf{v}$, $j \geq 0$. Ne consegue che $\psi(\lambda)\mathbf{v} = \psi(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, quindi, $\psi(\lambda)$=0. □

Corollario 5.1 *Sia $p(z)$, come definito in (5.1), il polinomio caratteristico di A e sia*

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^{\nu} (z - \lambda_i)^{m_i} \tag{5.2}$$

il suo polinomio minimale. Allora

$$1 \leq m_i \leq \bar{m}_i, \qquad i = 1, \ldots, \nu.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue facilmente dal Teorema 5.3, in cui abbiamo visto che $p(z) = q(z)\psi(z)$. □

Il significato della molteplicità m_i di λ_i nel polinomio minimale sarà chiarito successivamente, sebbene il precedente corollario stabilisca che essa è non maggiore della molteplicità algebrica. Ovviamente, si avrà:

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i = m \equiv \deg(\psi). \tag{5.3}$$

Utilizzando argomenti analoghi a quelli visti nella dimostrazione del Teorema 5.3, si dimostra il seguente risultato.

Teorema 5.4 *Sia $h(z)$ un polinomio di grado maggiore di m, il grado del polinomio minimale di una data matrice A. Pertanto, dividendo $h(z)$ per $\psi(z)$, si ottiene:*

$$h(z) = q(z)\psi(z) + r(z), \qquad \deg(r) < m.$$

In tal caso, si ha: $h(A) = r(A)$.

Osservazione 5.1 *Il precedente teorema dimostra come polinomi di grado diverso possano dare la stessa matrice, se calcolati in A. In particolare, qualunque polinomio calcolato in A si può ottenere calcolando in A un opportuno polinomio di grado* <u>minore</u> *del grado del polinomio minimale di A.*

Cerchiamo ora di approfondire il significato che due polinomi diversi, siano essi $h(z)$ e $g(z)$, diano la stessa matrice, se calcolati in A:

$$h(A) = g(A). \tag{5.4}$$

Pertanto, anche la loro differenza,

$$d(z) = h(z) - g(z),$$

è un polinomio. Inoltre, si avrà $d(A) = h(A) - g(A) = O$. Se $\psi(z)$ è il polinomio minimale di A, come definito in (5.2), si avrà, dunque,

$$d(z) = q(z)\psi(z).$$

Poiché (vedi (5.2)) per ogni $i = 1 \ldots, \nu$,

$$\psi^{(j)}(\lambda_i) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m_i - 1,$$

segue che,

$$d^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} q^{(j-k)}(\lambda_i)\psi^{(k)}(\lambda_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, \nu, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1.$$

ovvero,

$$h^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i), \qquad i = 1, \ldots, \nu, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1. \tag{5.5}$$

Definizione 5.1 *Due polinomi $h(z)$ e $g(z)$ che soddisfino la (5.5) si dicono* assumere gli stessi valori sullo spettro di A.

Supponiamo, ora, che due polinomi $h(z)$ e $g(z)$ soddisfino la (5.5). Segue che la loro differenza è divisibile per $\psi(z)$, il polinomio minimale di A e, pertanto, risulta verificata la (5.4). In conclusione, i precedenti argomenti dimostrano il seguente risultato.

Teorema 5.5 *Due polinomi $h(z)$ e $g(z)$ soddisfano $h(A) = g(A)$ se e solo se essi assumono gli stessi valori sullo spettro di A.*

Questo risultato permette di dare le seguenti definizioni.

Definizione 5.2 *Una funzione $f(z)$* è definita sullo spettro di A *se sono definiti:*

$$f^{(j)}(\lambda_i), \qquad i = 1, \ldots, \nu, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1.$$

Osservazione 5.2 *Pertanto, se una funzione è olomorfa in un dominio contenente $\sigma(A)$, essa sarà definita sul suo spettro.*

Definizione 5.3 *Sia $f(z)$ una funzione definita sullo spettro di A, e sia $g(z)$ il polinomio che assume gli stessi valori di $f(z)$ sullo spettro di A, ovvero*

$$f^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i), \qquad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 0, \dots, m_i - 1. \tag{5.6}$$

Allora

$$f(A) \equiv g(A). \tag{5.7}$$

Corollario 5.2 $\lambda \in \sigma(A) \;\Rightarrow\; f(\lambda) \in \sigma(f(A))$ *e l'autovettore corrispondente è lo stesso.*

Dimostrazione. Da (5.7) e dal Teorema 5.1 segue che se λ_i è autovalore di A con autovettore $\mathbf{x}_i$, allora $g(\lambda_i)$ è autovalore di $g(A) = f(A)$ con lo stesso autovettore. La tesi si completa osservando che dalla (5.6) segue che $f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$. □

Il polinomio (5.6) è un polinomio interpolante di Hermite generalizzato, che si dimostra esistere ed essere unico. Esso si può rappresentare, utilizzando una base di Lagrange generalizzata, come

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} f^{(j-1)}(\lambda_i) \Phi_{ij}(\lambda), \tag{5.8}$$

dove $\Phi_{ij}(\lambda) \in \Pi_{m-1}$ è univocamente individuato dalle m condizioni:

$$\Phi_{ij}^{(r-1)}(\lambda_\ell) = \delta_{i\ell}\delta_{jr}, \qquad \ell = 1, \dots, \nu, \quad r = 1, \dots, m_\ell. \tag{5.9}$$

Osservazione 5.3 *Gli m polinomi (vedi (5.3)) di grado $m-1$*

$$\Phi_{ij}(\lambda) \qquad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, m_i,$$

si dimostrano essere linearmente indipendenti tra loro e, pertanto, costituiscono una base per Π_{m-1} (come detto innanzi, si tratta di una generalizzazione della base di Lagrange per l'interpolazione polinomiale[2]).

Pertanto, dalle (5.7)–(5.8) segue che:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} f^{(j-1)}(\lambda_i) \Phi_{ij}(A) \equiv \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} f^{(j-1)}(\lambda_i) Z_{ij}, \tag{5.10}$$

dove le m matrici

$$Z_{ij}, \qquad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, m_i, \tag{5.11}$$

non dipendono da $f(\lambda)$, ma solo dalla matrice A.

Definizione 5.4 *Le matrici $\{Z_{ij}\}$ definite nella (5.11) sono dette* matrici componenti *di A.*

Vale il seguente risultato.

Teorema 5.6 *Le m matrici componenti $\{Z_{ij}\}$ sono linearmente indipendenti.*[3]

[2] In particolare, dalla (5.9) segue che la base considerata si riduce alla base di Lagrange nel caso in cui $m_\ell = 1$, $\ell = 1 \dots, \nu$.
[3] E, pertanto, nonnulle.

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}Z_{ij} = O$. In tal caso, se non fossero nulli tutti i coefficienti c_{ij}, si otterrebbe che il polinomio

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\Phi_{ij}(z) \in \Pi_{m-1}$$

non sarebbe identicamente nullo, poichè i polinomi $\{\Phi_{ij}\}$ sono linearmente indipendenti. Tuttavia, considerando che $Z_{ij} = \Phi_{ij}(A)$, si otterrebbe

$$\phi(A) = O$$

con $\deg(\phi) < \deg(\psi) = m$, essendo ψ il polinomio minimale di A, il che è chiaramente assurdo. □

Un esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Questa matrice ha due autovalori semplici uguali a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. In tal caso, quindi, il polinomio minimale e il polinomio caratteristico coincideranno. I corrispondenti polinomi $\Phi_{i1}(\lambda)$, $i = 1, 2$, sono dati dai polinomi di base di Lagrange:

$$\Phi_{11}(\lambda) = \frac{\lambda-3}{1-3} = \frac{1}{2}(3-\lambda), \qquad \Phi_{21}(\lambda) = \frac{\lambda-1}{3-1} = \frac{1}{2}(\lambda-1).$$

Le matrici componenti sono quindi date da:

$$Z_{11} = \frac{1}{2}(3I - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Z_{21} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Pertanto, data una generica funzione $f(z)$, si ottiene

$$f(A) = f(1)Z_{11} + f(3)Z_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(3)+f(1) & f(3)-f(1) \\ f(3)-f(1) & f(3)+f(1) \end{pmatrix}.$$

Ad esempio:

$$e^A = e^1 Z_{11} + e^3 Z_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^3+e^1 & e^3-e^1 \\ e^3-e^1 & e^3+e^1 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = Z_{11} + \sqrt{3}Z_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = Z_{11} + 3^{-1}Z_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+1 & \frac{1}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-1 & \frac{1}{3}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.1 Proprietà delle matrici componenti

Osserviamo, innanzitutto, che le matrici componenti *commutano* tra loro, essendo polinomi della stessa matrice. Pertanto,

$$Z_{ij}Z_{kr} = Z_{kr}Z_{ij}, \qquad \forall i, j, k, r.$$

Si consideri ora $f(z) \equiv 1$. Dalla (5.10) si ottiene:

$$I = \sum_{i=1}^{\nu} Z_{i1}. \tag{5.14}$$

Se si considera, invece, $f(z) = z$, si ottiene, allo stesso modo:[4]

$$A = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i Z_{i1} + Z_{i2}). \tag{5.15}$$

Da questa si ottiene:

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i Z_{i1} + Z_{i2}) \right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} (\lambda_i \lambda_k Z_{i1} Z_{k1} + 2\lambda_i Z_{i1} Z_{k2} + Z_{i2} Z_{k2}). \tag{5.16}$$

Tuttavia, considerando $f(z) = z^2$, sempre dalla (5.10) si ottiene:

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i^2 Z_{i1} + 2\lambda_i Z_{i2} + 2Z_{i3}).$$

Uguagliando il secondo membro di questa equazione all'ultimo membro della (5.16), si ottiene:

$$\begin{aligned} Z_{i1}Z_{k1} &= \delta_{ik} Z_{i1}, && (5.17) \\ Z_{i1}Z_{k2} &= \delta_{ik} Z_{i2}, && (5.18) \\ Z_{i2}Z_{k2} &= 2\delta_{ik} Z_{i3}. && (5.19) \end{aligned}$$

Mediante argomenti analoghi, è possibile dimostrare che:

$$\begin{aligned} Z_{ij}Z_{kr} &= O, && \text{per} \quad i \neq k, && (5.20) \\ Z_{i1}Z_{ij} &= Z_{ij}, && \text{per} \quad j \geq 1, && (5.21) \\ Z_{i2}Z_{ij} &= jZ_{i,j+1}, && \text{per} \quad j \geq 1. && (5.22) \end{aligned}$$

Ragionando per induzione, dalla (5.22) segue inoltre che:

$$Z_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} Z_{i2}^{j-1}, \qquad j \geq 2. \tag{5.23}$$

Osservazione 5.4 *In particolare, dalla (5.21) segue, per $j = 1$:*

$$Z_{i1}^2 = Z_{i1}.$$

[4] Nel seguito assumeremo, per semplicità di notazione, che $Z_{ij} = O$, se $j \geq m_i$. Questa condizione è infatti vera, come dimostreremo successivamente.

Ovvero, le matrici $\{Z_{i1}\}$ *sono* idempotenti. *Questo fatto, unito alla (5.14) ed alla (5.17) ci dice che è possibile decomporre un generico vettore* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\bar{m}}$ *come somma di* ν *vettori:*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{v}_i = Z_{i1}\mathbf{v}, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Osservando che $Z_{k1}\mathbf{v}_i = \delta_{ik}\mathbf{v}_i$*, abbiamo che le matrici* $\{Z_{i1}\}$ *possono essere riguardate come applicazioni lineari,*

$$Z_{i1} : \mathbb{C}^{\bar{m}} \longrightarrow \mathcal{M}_i, \qquad i = 1, \dots, \nu,$$

dove

$$\mathcal{M}_i = \{Z_{i1}\mathbf{v} \, : \, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\bar{m}}\}, \qquad i = 1, \dots, \nu, \tag{5.24}$$

sono sottospazi vettoriali che soddisfano le condizioni:

$$\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset, \quad i \neq j, \qquad \cup_{i=1}^{\nu} \mathcal{M}_i = \mathbb{C}^{\bar{m}}, \tag{5.25}$$

e per i quali si dimostra che

$$\dim(\mathcal{M}_i) = \bar{m}_i, \qquad i = 1, \dots, \nu. \tag{5.26}$$

Si tratta, in particolare, di sottospazi (destri) invariati *di* A*. Infatti:*

$$\mathbf{w} \in \mathcal{M}_i \Leftrightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\bar{m}} : \mathbf{w} = Z_{i1}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{w} = A(Z_{i1}\mathbf{v}) = Z_{i1}(A\mathbf{v}) \in \mathcal{M}_i.$$

Si consideri, ora, $f(z) = z - \lambda_k$, dove $\lambda_k \in \sigma(A)$. Si ottiene, dalle (5.17) e (5.20):

$$Z_{k1}(A - \lambda_k I) = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_k) Z_{k1} Z_{i1} + \sum_{i=1}^{\nu} Z_{k1} Z_{i2} \equiv Z_{k2}. \tag{5.27}$$

Da questa, tenendo conto della (5.23), si ottiene:

$$Z_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} Z_{i1}(A - \lambda_i I)^{j-1}, \qquad j \geq 1. \tag{5.28}$$

Questa consente di riscrivere la (5.10) come:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!} Z_{i1}(A - \lambda_i I)^{j-1}. \tag{5.29}$$

Il prossimo risultato stabilisce che la matrice $\{Z_{i2}\}$ è *nilpotente* con *indice di nilpotenza* pari a m_i, $i = 1, \dots, \nu$, essendo m_i la molteplicità di λ_i nel polinomio minimale di A.

Teorema 5.7 $Z_{i2}^{m_i} = O$*,* $i = 1, \dots, \nu$*.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \neq \sigma(A)$. Segue che entrambe le funzioni $(\lambda - z)$ e $(\lambda - z)^{-1}$ sono definite sullo spettro di A. Pertanto, si ottiene che:

$$(\lambda I - A) = \sum_{i=1}^{\nu} [(\lambda - \lambda_i) Z_{i1} - Z_{i2}]$$

e, inoltre, per la (5.28),

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{(j-1)!}{(\lambda-\lambda_i)^j}Z_{ij} = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j}Z_{i1}(A-\lambda_i I)^{j-1}\\ &= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j}Z_{i1}Z_{i2}^{j-1}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, dalla (5.14):

$$\begin{aligned} I &= (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}\\ &= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}[(\lambda-\lambda_i)Z_{i1} - Z_{i2}]\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j}Z_{i1}Z_{i2}^{j-1}\\ &= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^{j-1}}Z_{i1}Z_{i2}^{j-1} - \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j}Z_{i1}Z_{i2}^{j}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{\nu}\left[Z_{i1} - \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}Z_{i1}Z_{i2}^{m_i}\right],\end{aligned}$$

ovvero

$$Z_{i1} = Z_{i1} - \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}Z_{i2}^{m_i}, \qquad i = 1,\ldots,\nu,$$

da cui segue, evidentemente, che $Z_{i2}^{m_i} = O, \;\; i = 1,\ldots,\nu.\square$

Come corollario di questo risultato, ricordando che $m_i \le \bar{m}_i$ e tenendo in conto della (5.27), possiamo quindi riscrivere la (5.29) equivalentemente come:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\bar{m}_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}Z_{i1}(A-\lambda_i I)^{j-1} \equiv \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\bar{m}_i}f^{(j-1)}(\lambda_i)Z_{ij}. \tag{5.30}$$

In altri termini, nell'espressione di $f(A)$ possiamo utilizzare indifferentemente le molteplicità algebriche $\{\bar{m}_i\}$ o le molteplicità nel polinomio minimale $\{m_i\}$ degli autovalori $\{\lambda_i\}$.

Definizione 5.5 *Sia $\lambda_i \in \sigma(A)$. Diremo che l'autovalore è:*

- semplice *se $\bar{m}_i = 1$;*
- degenere *se $\bar{m}_i > 1$;*
- semisemplice *se $m_i = 1$.*

Chiaramente, un autovalore semplice è anche semisemplice. Viceversa, un autovalore semisemplice può essere degenere.

Osservazione 5.5 *È evidente che, nel caso in cui λ_i sia semplice o semisemplice, allora $Z_{i2} = O$. Pertanto, l'i-esimo termine delle sommatorie in (5.30) (o di quella in (5.29)) si riduce a $f(\lambda_i)Z_{i1}$.*

Alcuni esempi

La matrice identità I $\bar{m} \times \bar{m}$ ha un unico autovalore uguale ad 1. Infatti il suo polinomio caratteristico vale

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^{\bar{m}}.$$

Il suo polinomio minimale, invece, è

$$\psi(\lambda) = \lambda - 1.$$

Pertanto 1 è un autovalore semisemplice, in quanto la sua molteplicità nel polinomio minimale vale 1, ma degenere, poiché la sua molteplicità algebrica vale $\bar{m}$.

Esercizio 5.1 *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\bar{m}} \end{pmatrix}.$$

Calcolare le sue matrici componenti stabilendo, in questo modo, che i suoi autovalori sono sempre semisemplici. Calcolare, quindi, l'espressione di $f(A)$.

Una *matrice di Frobenius* (o di *compagnia*, già incontrata in precedenza) è una matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_s & -a_{s-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}_{s \times s}. \tag{5.31}$$

Il suo polinomio caratteristico è dato (si veda il Lemma 3.1) da

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{s} a_i \lambda^{s-i}, \qquad a_0 = 1. \tag{5.32}$$

Per queste matrici, molteplicità algebrica e molteplicità nel polinomio minimale di un autovalore coincidono. Vale, infatti, il seguente risultato.

Teorema 5.8 *Per la matrice (5.31), il polinomio minimale $\psi(\lambda)$ coincide con il polinomio carateristico $p(\lambda)$.*

Dimostrazione. Sia, per assurdo,

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i \lambda^i, \qquad \ell < s,$$

con $\alpha_\ell = 1$, il polinomio minimale (monico) di A. Denotando con $\mathbf{e}_i$ l'i-esimo versore in $\mathbb{R}^s$, segue facilmente, dalla (5.31), che

$$\mathbf{e}_i^T A = \mathbf{e}_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, \ell,$$

poiché $\ell < s$. Pertanto,

$$\mathbf{e}_1 A^i = \mathbf{e}_{i+1}, \qquad i = 0, \dots, \ell.$$

D'altronde, essendo $\psi(A) = O$, segue che

$$\mathbf{0}^T = \mathbf{e}_1^T\psi(A) = \sum_{i=0}^{\ell}\alpha_i\mathbf{e}_1^T A^i = \sum_{i=0}^{\ell}\alpha_i\mathbf{e}_{i+1} = (\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\ell}_{\ell+1}\overbrace{0 \ldots 0}^{s-\ell-1}) \neq \mathbf{0}^T,$$

che è chiaramente un assurdo. Poiché l'assurdo è derivato dall'ipotesi $\ell < s$, si conclude che $\deg(\psi) = s$ e, quindi, $p(\lambda) = \psi(\lambda)$. □

Come semplice conseguenza, vale il seguente risultato.

Corollario 5.3 *Per una matrice di Frobenius, ogni autovalore semisemplice è anche semplice.*

In altri termini, una matrice di Frobenius non possiede autovalori semisemplici e degeneri.

Esercizio 5.2 *Determinare l'autovettore della matrice (5.31), relativo ad un generico autovalore λ, radice del polinomio caratteristico (5.32).*

5.2 Successioni di funzioni di matrici

Sia ora assegnata una successione di funzioni $\{f_k(z)\}$ definita sullo spettro di A. Diremo che la successione *converge sullo spettro di A* se:

$$\lim_{k\to\infty} f^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \qquad i = 1,\ldots,\nu, \quad j = 0,\ldots,m_i - 1. \tag{5.33}$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 5.9 *Una successione di funzioni di matrici $\{f_k(A)\}$ converge a $f(A)$ se e solo se la successione $\{f_k(z)\}$ converge sullo spettro di A.*

Dimostrazione. Il fatto che se la successione converge sullo spettro di A allora

$$f_k(A) \longrightarrow_{k\to\infty} f(A),$$

discende facilmente dal fatto che è sufficiente la convergenza puntuale fornita dalle (5.33). Viceversa, se

$$f_k(A) \equiv \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{f_k^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}Z_{i1}Z_{i2}^{j-1} \longrightarrow_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}Z_{i1}Z_{i2}^{j-1} \equiv f(A), \tag{5.34}$$

allora, moltiplicando membro a membro per $Z_{i1}Z_{i2}^{m_i-1}$ si ottiene, in virtù del Teorema 5.7,

$$f_k(\lambda_i)Z_{i1}Z_{i2}^{m_i-1} \longrightarrow_{k\to\infty} f(\lambda_i)Z_{i1}Z_{i2}^{m_i-1},$$

ovvero

$$f_k(\lambda_i) \longrightarrow_{k\to\infty} f(\lambda_i). \tag{5.35}$$

Procedendo in modo analogo, moltiplicando membro a membro la (5.34) per $Z_{i1}Z_{i2}^{m_i-2}$, si arriva a concludere che, oltre alla (5.35), vale anche

$$f_k'(\lambda_i) \longrightarrow_{k\to\infty} f'(\lambda_i).$$

La tesi si completa ripetendo il procedimento utilizzando, nell'ordine, $Z_{i1}Z_{i2}^{m_i-3},\ldots,Z_{i1}Z_{i2}^{0}$. La dimostrazione si completa osservando che l'indice i utilizzato è generico e, pertanto, il ragionamento vale per ogni $i \in \{1,\ldots,\nu\}$. □

Corollario 5.4 *Sia A una matrice avente autovalori di modulo minore di 1. Allora:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \tag{5.36}$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} z^n, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Questa successione converge a $f(z) = (1 - z)^{-1}$, per $k \to \infty$, se e solo se $|z| < 1$. Quindi converge sullo spettro di A e, pertanto, la (5.36) segue. □

Corollario 5.5 *Sia A una qualunque matrice quadrata. Allora*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla precedente, considerando la successione di funzioni

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \square$$

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 5.10 $\lim_{t\to\infty} \|e^{At}\|$*:*

- *tende a 0 se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa;*
- *è limitato se e solo se tutti gli autovalori si A hanno parte reale non positiva, essendo semisemplici quelli con parte reale nulla;*
- $\uparrow \infty$*, altrimenti.*

Dimostrazione. La tesi discende facilmente, osservando che

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} Z_{ij}. \square$$

Teorema 5.11 $\lim_{t\to\infty} \|A^n\|$*:*

- *tende a 0 se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di 1;*
- *è limitato se e solo se tutti gli autovalori si A hanno modulo non maggiore di 1, essendo semisemplici quelli di modulo 1;*
- $\uparrow \infty$*, altrimenti.*

Dimostrazione. La tesi discende facilmente, osservando che

$$A^n = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} n^{(j-1)} \lambda_i^{n-j+1} Z_{ij}. \square$$

Definizione 5.6 *Una matrice A si dice* convergente *se il suo* raggio spettrale,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|,$$

è minore di 1.

Corollario 5.6 $A^n \to 0,\ n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(A) < 1.$

Teorema 5.12 *Sia dato il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0.$$

Allora, la sua soluzione è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} y_0, \qquad t \geq 0.$$

Dimostrazione. Infatti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
A\mathrm{e}^{At} &= \sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i Z_{i1} + Z_{i2}) \cdot \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i t} Z_{i1} Z_{i2}^{j-1} \\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} Z_{i1} Z_{i2}^{j-1} + \frac{t^{j-1}}{(j-1)}\mathrm{e}^{\lambda_i t} Z_{i1} Z_{i2}^{j}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} \left[\lambda_i e^{\lambda_i t} Z_{i1} + \sum_{j=2}^{m_i} \frac{t^{j-1}\lambda_i + (j-1)t^{i-2}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i t} Z_{i1} Z_{i2}^{j-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right) Z_{i1} Z_{i2}^{j-1} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}. \square
\end{aligned}$$

Da questo risultato, e dal Teorema 5.10, segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 5.7 *La soluzione nulla dell'equazione*

$$y' = Ay$$

è:

- asintoticamente stabile *se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa;*
- stabile *se e solo se tutti gli autovalori si A hanno parte reale non positiva, essendo semisemplici quelli con parte reale nulla;*
- instabile, *altrimenti.*

Analogamente, nel caso discreto si dimostra il seguente risultato.

Teorema 5.13 *La soluzione dell'equazione*

$$y_{n+1} = Ay_n, \qquad n \geq n_0,$$

è:

$$y_n = A^{n-n_0} y_{n_0},$$

dove y_{n_0} è la condizione iniziale. La soluzione nulla di tale equazione sarà:

- asintoticamente stabile *se e solo se tutti gli autovalori di A hanno autovalori di modulo minore di 1;*
- stabile *se e solo se tutti gli autovalori si A hanno modulo non maggiore di 1, essendo semisemplici quelli di modulo 1;*
- instabile, *altrimenti.*

Vale, inoltre, il seguente risultato.

Teorema 5.14 *Sia A con autovalori*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_\nu|, \tag{5.37}$$

con λ_1 semplice (e, pertanto, semisemplice), e sia $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e tale che $Z_{11}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, essendo Z_{11} la prima matrice componente relativa a λ_1. Allora $A^n\mathbf{v}$ tende, al crescere di n, ad allinearsi con l'autovettore relativo all'autovalore di modulo massimo.

Dimostrazione. Preliminarmente osserviamo che, poiché $Z_{12} = O$,

$$A = \lambda_1 Z_{11} + \sum_{i=2}^{\nu}(\lambda_i Z_{i1} + Z_{i2}).$$

Pertanto,

$$A(Z_{11}\mathbf{v}) = Z_{11}A\mathbf{v} = Z_{11}\left[\lambda_1 Z_{11} + \sum_{i=2}^{\nu}(\lambda_i Z_{i1} + Z_{i2})\right]\mathbf{v} = \lambda_1(Z_{11}\mathbf{v}).$$

Ovvero, $Z_{11}\mathbf{v}$ è autovettore relativo a λ_1. La tesi si completa considerando che, per $n \gg 1$:

$$A^n\mathbf{v} = \lambda_1^n\left[Z_{11}\mathbf{v} + \sum_{i=2}^{\nu}\sum_{j=1}^{m_i} n^{(j-1)}\frac{\lambda_i^{n-j+1}}{\lambda_1^n}Z_{ij}\right] \approx \lambda_1^n Z_{11}\mathbf{v}.\square$$

Definizione 5.7 *L'autovalore λ_1 di A, soddisfacente la (5.37), si dice* autovalore dominante *di A.*

Osservazione 5.6 *Il risultato del Teorema 5.14 è alla base del* metodo delle potenze *per il calcolo dell'autovalore dominante di una matrice.*

5.3 Forma canonica di Jordan

Consideriamo i sottospazi $\mathcal{M}_i$, definiti in (5.24), aventi dimensione $\bar{m}_i$, ovvero pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i, $i = 1\ldots,\nu$, come esposto in (5.26). Ricordiamo, inoltre, che essi soddisfano le proprietà (5.25). Inoltre, se $\mathbf{v}_i \in \mathcal{M}_i$, allora esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\bar{m}}$ tale che $\mathbf{v}_i = Z_{i1}\mathbf{v}$. Vale il seguente risultato.

Teorema 5.15 *Sia $Z_{i2}^{j-1}Z_{i1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $i = 1,\ldots,p$ e $Z_{i2}^p Z_{i1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Allora i vettori $Z_{i2}^{j-1}Z_{i1}\mathbf{v}$, $j = 1,\ldots,p$, sono linearmente indipendenti ed appartengono a $\mathcal{M}_i$.*

Dimostrazione. Osservando che $Z_{i2}^{j-1}Z_{i1}\mathbf{v} = Z_{i1}(Z_{i2}^{j-1}\mathbf{v})$, $j = 1,\ldots,p$, è evidente l'appartenenza dei vettori a $\mathcal{M}_i$. Riguardo alla loro lineare indipendenza, se fosse

$$\sum_{j=1}^{p} c_j Z_{i2}^{j-1} Z_{i1}\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

seguirebbe che

$$Z_{i2}^{p-1}\sum_{j=1}^{p} c_j Z_{i2}^{j-1} Z_{i1}\mathbf{v} = c_1 Z_{i1} Z_{i2}^{p-1}\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

ovvero $c_1 = 0$. Moltiplicando, quindi, per Z_{i2}^{p-2}, si perviene a concludere che $c_2 = 0$, ecc. □

Definizione 5.8 *Siano* $\mathbf{v}_i \equiv Z_{i1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *e i vettori*

$$\mathbf{x}_{ij} \equiv Z_{i2}^{j-1}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}, \quad i = 1,\ldots,p, \qquad Z_{i2}^{p}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \tag{5.38}$$

In tal caso, i vettori $\{\mathbf{x}_{ij}\}_{j=1\ldots,p}$ *costituiscono una* catena di Jordan *che parte da* $\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{x}_{i1}$.

Osservazione 5.7 *Dalle (5.27) e (5.38), segue che*

$$\mathbf{x}_{i,j+1} = Z_{i2}\mathbf{x}_{ij} = A\mathbf{x}_{ij} - \lambda_i\mathbf{x}_{ij}, \quad i = 1,\ldots,p-1, \qquad e \qquad Z_{i2}\mathbf{x}_{ip} = \mathbf{0},$$

ovvero:

$$A\mathbf{x}_{ij} = \lambda_i\mathbf{x}_{ij} + \mathbf{x}_{i,j+1}, \quad j = 1,\ldots,p-1, \qquad e \qquad A\mathbf{x}_{ip} = \lambda_i\mathbf{x}_{ip}.$$

I $p-1$ *vettori* $\mathbf{x}_{ij}$, $j = 1,\ldots,p-1$, *sono denominati* autovettori generalizzati *relativi all'autovalore* λ_i. *Pertanto, la catena di Jordan (5.38) sarà costituita da* $p-1$ *autovettori generalizzati e dall'autovettore* $\mathbf{x}_{ip}$ *(tra loro linearmente indipendenti). Dal Teorema 5.7 segue inoltre che:* $1 \le p \le m_i \le \bar{m}_i$.

Più in generale, ricordando che gli elementi della catena di Jordan (5.38) sono vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{M}_i$, la cui dimensione è $\bar{m}_i \ge p$, è possibile dimostrare il seguente risultato [13].

Teorema 5.16 *Se* λ_i *è un autovalore di* A *con molteplicità algebrica* $\bar{m}_i$ *e molteplicità nel polinomio minimo* m_i, *allora* $\exists k_i \ge 1$ *tale che:*

- $\mathbf{x}_{i1}^{(k)} \in \mathcal{M}_i$ *origina una catena di Jordan di lunghezza* p_k, $k = 1,\ldots,k_i$.
- $m_i = p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_{k_i} \ge 1$;
- $\sum_{k=1}^{k_i} p_k = \bar{m}_i$;
- *gli* $\bar{m}_i$ *vettori*

$$\left\{\mathbf{x}_{i1}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{ip_1}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{i1}^{(k_i)},\ldots,\mathbf{x}_{ip_{k_i}}^{(k_i)}\right\} \tag{5.39}$$

sono linearmente indipendenti. In particolare, $\left\{\mathbf{x}_{ip_1}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{ip_{k_i}}^{(k_i)}\right\}$ *sono* k_i *autovettori di* A *linearmente indipendenti relativi all'autovalore* λ_i; *gli altri vettori sono autovettori generalizzati.*

Definizione 5.9 *Il numero di autovettori linearmente indipendenti relativi ad un autovalore (e.g., k_i nel precedente teorema) è detto* molteplicità geometrica *dell'autovalore.*

Definendo la matrice $X_i \in \mathbb{C}^{\bar{m}\times\bar{m}_i}$, le cui colonne sono i vettori in (5.39), nell'ordine specificato, si verifica facilmente che

$$AX_i = X_iJ_i,$$

con

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{(k_i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\bar{m}_i\times\bar{m}_i},$$

e

$$J_i^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p_k\times p_k}, \qquad k = 1,\ldots,k_i.$$

Questi ultimi sono detti *miniblocchi di Jordan* relativi all'autovalore λ_i. Evidentemente, la molteplicità geometrica dell'autovalore coincide con il loro numero.

Esercizio 5.3 *Dimostrare che la matrice* $N_i = J_i - \lambda_i I_{\bar{m}_i}$ *è nilpotente di indice m_i.*

Similmente, definendo la matrice

$$X = (\ X_1\ \ldots\ X_\nu\ ) \in \mathbb{C}^{\bar{m}\times\bar{m}},$$

si ha che questa matrice è nonsingolare e, inoltre,

$$AX = XJ \equiv X\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\nu \end{pmatrix}, \qquad (5.40)$$

che definisce la *forma canonica di Jordan* di A. Evidentemente, la (5.40) può essere riscritta come

$$X^{-1}AX = J. \qquad (5.41)$$

Alcune osservazioni:

- k_i è la dimensione dello spazio nullo della matrice $(A - \lambda_i I)$ e coincide con il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ_i;
- se $\bar{m}_i = 1$, cioè l'autovalore è semplice, allora anche $m_i = k_i = 1$;
- se $m_i = 1 < \bar{m}_i$, cioè l'autovalore è semisemplice ma degenere, allora $J_i = \lambda_i I_{\bar{m}_i}$, ovvero $k_i = \bar{m}_i$. In altri termini, le molteplicità geometrica ed algebrica dell'autovalore coincidono;
- per contro, se $m_i = \bar{m}_i$, allora $k_i = 1$.

Definizione 5.10 *Se X è nonsingolare, allora le matrici A e $X^{-1}AX$ sono dette* simili; *la seconda matrice si dice* trasformata per similitudine *di A.*

Pertanto, le matrici ai due membri della (5.41) sono simili.

Osservazione 5.8 *È facile verificare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e polinomio minimale. Inoltre, poiché $(X^{-1}AX)^i = X^{-1}A^iX$, segue facilmente che le matrici componenti di due matrici simili sono legate dalla stessa trasformazione di similitudine. Pertanto, se $f(z)$ è definita sullo spettro di A e T è una matrice nonsingolare avente la stessa dimensione, si ottiene:*

$$T^{-1}f(A)\,T = f\left(T^{-1}AT\right).$$

Definizione 5.11 *Una matrice si dirà* diagonalizzabile *se la matrice J in (5.40) è diagonale.*

Vale, evidentemente, il seguente risultato.

Teorema 5.17 *Una matrice è diagonalizzabile se e solo se tutti i suoi autovalori sono semplici o semisemplici.*

Esercizio 5.4 *Verificare che, data la matrice di Frobenius (5.31), se il polinomio caratteristico (5.32) ha s radici distinte $\{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$, allora essa è diagonalizzata dalla matrice di Vandermonde (si veda l'Esercizio 5.2)*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_s^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.5 *Calcolare le matrici componenti della matrice J definita in (5.40)-(5.41) (si veda l'Esercizio 5.3).*

Osservazione 5.9 *Poiché una matrice può essere trasformata in forma di Jordan mediante una opportuna trasformazione per similitudine, ha senso porsi il problema di calcolare una funzione di matrice, quando la matrice in questione ha la struttura di un generico miniblocco di Jordan:*

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

In questo caso, si vede facilmente che λ è un autovalore degenere di molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica 1. Inoltre, le matrici componenti di J_λ sono

$$Z_{11} = I, \qquad Z_{12} = J_\lambda - \lambda I \equiv \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Da questo segue che, per $j = 2, \dots, n$:

$$Z_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} Z_{12}^{j-1} \equiv \frac{1}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & \\ 1 & \ddots & & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove la sottodiagonale con elementi uguali ad 1 è la $(j-1)$-esima. Di conseguenza, $Z_{12}^n = O$. Inoltre, si ottiene che, per una data funzione $f(z)$ definita sullo spettro di J_λ,

$$\begin{aligned} f(J_\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} f^{(j-1)}(\lambda) Z_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j-1)}(\lambda)}{(j-1)!} Z_{12}^{j-1} \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & & & & \\ f'(\lambda) & \ddots & & & \\ \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \dots & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.42}$$

la cui struttura è assai peculiare.

Esercizio 5.6 *Verificare che, data la matrice*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$P = e^H$, *denominata* matrice di Pascal, *è triangolare inferiore con elementi:*

$$(P)_{ij} = \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}, \qquad \forall\, i \geq j = 1, \dots, n.$$

(Suggerimento: si usi il Corollario 5.5, considerando che H è nilpotente con indice di nilpotenza n, e calcolandone la forma di Jordan.)

Esercizio 5.7 *Con riferimento al precedente Esercizio 5.6, dimostrare che* $P \equiv P(1)$ *dove, in generale,* $P(t) = \mathrm{e}^{Ht}$. *Dimostrare che gli elementi di* $P(t)$ *(che è ancora una matrice triangolare inferiore), sono dati da:*

$$(P(t))_{ij} = t^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, \qquad \forall\, i \geq j = 1, \ldots, n.$$

Verificare che $P(t)P(s) = P(t+s)$ *e calcolare, quindi,* $P^{-1} = P(-1)$.