

Capitolo 4

Metodi lineari multistep

Occupiamoci, ora, della risoluzione numerica di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0. \quad (4.1)$$

Senza perdere in generalità, assumeremo che y e f siano funzioni scalari. Tuttavia tutto quello che vedremo si estende in modo naturale al caso di sistemi di equazioni differenziali. Assumeremo che la funzione f soddisfi le usuali condizioni di continuità e Lipschitzianità rispetto alla y , ed assumeremo che la soluzione del problema (4.1) esista e sia unica. Dal punto di vista concettuale, la risoluzione numerica del problema (4.1) avviene in tre fasi distinte:

1. definizione di un dominio discreto $\{t_n\}$;
2. definizione di un problema discreto definito su tale dominio;
3. risoluzione del problema discreto.

Per quanto riguarda il primo punto, definiremo un dominio discreto assai semplice:

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, \dots, N, \quad h = \frac{T - t_0}{N}. \quad (4.2)$$

Il parametro $h > 0$ è usualmente denominato *passo di discretizzazione* (o *integrazione*) o, più semplicemente, *passo*.

Per quanto riguarda il secondo punto considereremo, definendo y_n la approssimazione a $y(t_n)$ e

$$f_n \equiv f(t_n, y_n), \quad (4.3)$$

problemi discreti nella forma:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.4)$$

dove i coefficienti $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$ definiscono il metodo, in cui si supporranno assegnate le *condizioni iniziali*

$$y_0, \dots, y_{k-1}. \quad (4.5)$$

La (4.4) definisce un *metodo lineare multistep*, o *linear multistep formula (LMF)*, a k passi. In altri termini, approssimiamo il problema *continuo* ai valori iniziali del primo ordine (4.1) con un problema *discreto* ai valori iniziali di ordine k .

Per quanto riguarda il terzo punto, osserviamo che la (4.4) è definita a meno di una costante moltiplicativa nonnulla. Questa può essere determinata, imponendo la normalizzazione di un coefficiente. Nel nostro caso, imporremo la normalizzazione

$$\alpha_k = 1. \quad (4.6)$$

Pertanto, la (4.4) può essere riscritta come

$$y_{n+k} - h\beta_k f_{n+k} = - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.7)$$

È evidente che, note le k condizioni iniziali (4.5), si determineranno y_k, y_{k+1}, \dots , dalla (4.7). In particolare, se $\beta_k = 0$, la (4.7) diviene:

$$y_{n+k} = - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k.$$

Ovvero, si ottiene la nuova approssimazione direttamente mediante delle semplici sostituzioni in avanti. In tal caso, il metodo si dice *esplicito*.

Diversamente, ricordando la definizione (4.3) di f_n, y_n si otterrà dalla (4.7) risolvendo, ad ogni passo, un'equazione (generalmente) nonlineare. In questo caso, il metodo si dice *implicito*. È evidente che l'implementazione di un metodo esplicito è assai più semplice di uno implicito.

Concludiamo questa sezione definendo i seguenti polinomi:

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i, \quad \sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i, \quad (4.8)$$

denominati *primo* e *secondo polinomio caratteristico* associati al metodo LMF (4.4). In questo modo, quest'ultimo può essere rappresentato sinteticamente come:

$$\rho(E)y_n - h\sigma(E)f_n = 0, \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.9)$$

dove E è, al solito, l'operatore di *shift*. Poiché i due polinomi in (4.8) caratterizzano il dato metodo LMF, talora faremo riferimento a quest'ultimo come al *metodo* (ρ, σ) .

4.1 Ordine di un metodo LMF

In generale, la soluzione della (4.4) differirà da quella del problema continuo (4.1) (chiaramente, proiettata sulla mesh (4.2)). È tuttavia lecito richiedere che i due problemi siano *vicini* nel seguente senso: sia assegnata la soluzione esatta $y(t)$ valutata ai nodi della mesh (4.2), $\{y(t_n)\}$, e denotiamo con

$$\hat{f}_n \equiv f(t_n, y(t_n)). \quad (4.10)$$

Diremo che il metodo ha *ordine* p se

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i \hat{f}_{n+i} \equiv \tau_n = O(h^{p+1}), \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.11)$$

dove τ_n è detto *errore locale di troncamento*. In particolare, il metodo si dirà *consistente* se $p \geq 1$. In altri termini, si richiede che il *residuo* ottenuto inserendo la soluzione continua $\{y(t_n)\}$ nell'equazione discreta sia un infinitesimo di opportuno ordine del passo h .

L'ordine di un metodo LMF si traduce in condizioni algebriche sui suoi coefficienti, che andiamo ora ad esaminare. A questo fine, supporremo che $y(t)$ sia, per semplicità di esposizione, sviluppabile in serie di Taylor in t_0 . In tal caso, dalla (4.11) si ottiene, tenendo conto della (4.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i \hat{f}_{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i y'(t_{n+i}) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \sum_{j \geq 0} \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} i^j h^j - \sum_{i=0}^k \beta_i \sum_{j \geq 1} \frac{y^{(j)}(t_n)}{(j-1)!} i^{j-1} h^j \\ &= y(t_n) \sum_{i=0}^k \alpha_i + \sum_{j \geq 1} \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} h^j \sum_{i=0}^k (i^j \alpha_i - j i^{j-1} \beta_i). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Imponendo che le potenze di h^j , $j = 0, 1, \dots, p$, si annullino, si ottengono le condizioni per l'ordine p :

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k (i^j \alpha_i - j i^{j-1} \beta_i) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.13)$$

In particolare, le condizioni di consistenza sono date da:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k (i \alpha_i - \beta_i) = 0. \quad (4.14)$$

Quest'ultime possono essere riscritte, tenendo conto dei polinomi (4.8), come:

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1). \quad (4.15)$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 4.1 *L'ordine massimo di un LMF a k passi è $2k$, se il metodo è implicito, o $2k-1$, se il metodo è esplicito.*

Dimostrazione. In virtù delle (4.14), i coefficienti di un metodo di ordine p soddisferanno l'equazione

$$M_p \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

in cui

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & k & 1 & \dots & 1 \\ 0^2 & \dots & k^2 & 2 \cdot 0 & \dots & 2 \cdot k \\ \vdots & & \vdots & 3 \cdot 0^2 & \dots & 3 \cdot k^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0^p & \dots & k^p & p \cdot 0^{p-1} & \dots & p \cdot k^{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1 \times 2k+2}.$$

La tesi discende quindi dal fatto che M_p ha sempre rango massimo e, pertanto, $p \leq 2k$, se il metodo è implicito, avendo fissato la normalizzazione (4.6). Se il metodo è esplicito, invece, $p \leq 2k - 1$, perchè dovrà anche valere $\beta_k = 0$. \square

Osservazione 4.1 Dalle (4.11)–(4.13) segue che:

$$\tau_n = c_{p+1} y^{(p+1)}(t_n) h^{p+1} + O(h^{p+2}),$$

dove

$$c_{p+1} = \sum_{i=0}^k [i^{p+1} \alpha_i - (p+1) i^p \beta_i]$$

è denominato coefficiente principale dell'errore.

Osservazione 4.2 La denominazione “locale” dell'errore locale di troncamento τ_n (vedi (4.11)) deriva dal fatto che (si supponga, per semplicità, che il metodo sia esplicito), facendo l'ipotesi “locale”

$$y_{n+i} = y(t_{n+i}), \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (4.16)$$

e detto \tilde{y}_{n+k} il nuovo punto ottenuto dalla (4.4), allora $y(t_{n+k}) - \tilde{y}_{n+k} = \tau_n$. In altre parole, τ_n può essere interpretato, approssimativamente, come l'errore che si commetterebbe nel singolo passo di integrazione, sotto l'ipotesi locale (4.16). Nella prossima sezione esamineremo in maggior dettaglio la relazione esistente tra l'errore globale,

$$e_n = y(t_n) - y_n, \quad n = 0, \dots, N,$$

ed i corrispondenti errori locali $\tau_0, \dots, \tau_{N-k}$.

4.2 Convergenza

Osservando che la soluzione discreta $\{y_n\}$ soddisfa la (4.4), mentre la soluzione del problema (4.1), proiettata sulla *mesh* (4.2), $\{y(t_n)\}$, soddisfa la (4.11), è naturale richiedere che la

prima *converga* alla seconda, quando $N \rightarrow \infty$. Per questo motivo, si dirà che il metodo (4.4) è *convergente* se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{n=0, \dots, N} \|e_n\| = 0, \quad e_n = y(t_n) - y_n.$$

Osserviamo che se $N \rightarrow \infty$, allora:

$$h = \frac{T - t_0}{N} \rightarrow 0. \quad (4.17)$$

Pertanto, l'equazione dell'errore, ottenuta sottraendo la (4.4) dalla (4.11) è:

$$\rho(E)e_n - h\sigma(E)(\hat{f}_n - f_n) = \tau_n, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.18)$$

Poichè $h \rightarrow 0$ e $\tau_n = O(h^{p+1})$, $p \geq 1$, ha senso studiare la stabilità della soluzione nulla dell'equazione

$$\rho(E)e_n = 0, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.19)$$

Questa si ottiene direttamente applicando il metodo (4.4) all'equazione $y' = 0$, la cui soluzione è costante. Osserviamo che $\rho(z)$ non può essere un polinomio di Schur, a causa della proprietà di consistenza (4.15).¹ Può tuttavia essere un polinomio di Von Neumann, il che garantisce la stabilità della soluzione nulla per la (4.19). In tal caso, il metodo (ρ, σ) si dirà *0-stabile*.

La proprietà di 0-stabilità è importante, in quanto è possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.2 *Sia $f \in C^{(p+1)}$ ed il metodo (ρ, σ) 0-stabile. Se*

- $\tau_n = O(h^{p+1}) \quad n = 0, \dots, N - k$, e
- $e_i = O(h^r), \quad i = 0, \dots, k - 1$,

allora:

$$|e_n| \leq O(h^{\min\{r, p\}}), \quad n = k, \dots, N.$$

Dimostrazione. Si veda la Sezione 4.2.1. \square

In altre parole, se un metodo è 0-stabile e di ordine p , e le condizioni iniziali hanno accuratezza $O(h^p)$, allora l'errore globale e_n sarà a sua volta $O(h^p)$. Come semplice corollario, si ottiene il seguente risultato.

Corollario 4.1 *Un metodo LMF che sia consistente e 0-stabile è convergente.*

Osservazione 4.3 *Evidentemente, il problema continuo (4.1) fornisce solo la condizione iniziale y_0 . Le altre condizioni iniziali (4.5) possono essere approssimate, entro l'accuratezza desiderata, ad esempio mediante sviluppi in serie in $t = t_0$.*

La 0-stabilità è, in virtù del Teorema 4.2, una proprietà essenziale per un metodo LMF. Tuttavia è altresì evidente che richiedere che il polinomio $\rho(z)$ associato ad un metodo sia un polinomio di Von Neumann, introduce dei vincoli sui suoi coefficienti che, pertanto, non potranno essere utilizzati per incrementare l'ordine del metodo. Questo argomento, che abbiamo esposto in modo intuitivo, si formalizza in realtà come segue.

Teorema 4.3 (prima barriera di Dahlquist) *L'ordine massimo di un metodo LMF a k passi che sia 0-stabile è:*

- $k + 1$, se k è dispari;
- $k + 2$, se k è pari.

¹Se così non fosse, si avrebbe $\tau_n = O(h^0)$.

4.2.1 Dimostrazione della convergenza di un metodo LMF

In questa sezione dimostriamo il Teorema 4.2. Per fare questo, riscriviamo il problema discreto (4.3)-(4.4) e quello perturbato (4.10)-(4.11), rispettivamente, in forma vettoriale come segue:

$$A_N \mathbf{y}_N - hB_N \mathbf{f}_N = \boldsymbol{\eta}_N, \quad A_N \hat{\mathbf{y}}_N - hB_N \hat{\mathbf{f}}_N = \hat{\boldsymbol{\eta}}_N + \boldsymbol{\tau}_N, \quad (4.20)$$

con

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_k & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \alpha_0 & & \ddots & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & \alpha_0 & \dots & \alpha_k & \end{pmatrix}, \quad B_N = \begin{pmatrix} \beta_k & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \beta_0 & & \ddots & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & \beta_0 & \dots & \beta_k & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1 \times N-k+1}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{y}_N = \begin{pmatrix} y_k \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}_N = \begin{pmatrix} y(t_k) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_N = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_{N-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{f}_N = \begin{pmatrix} f_k \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_N = \begin{pmatrix} \hat{f}_k \\ \vdots \\ \hat{f}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1}, \quad (4.23)$$

e, infine,

$$\boldsymbol{\eta}_N = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} [h\beta_i f_i - \alpha_i y_i] \\ \vdots \\ h\beta_0 f_{k-1} - \alpha_0 y_{k-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}_N = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} [h\beta_i \hat{f}_i - \alpha_i y(t_i)] \\ \vdots \\ h\beta_0 \hat{f}_{k-1} - \alpha_0 y(t_{k-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1}. \quad (4.24)$$

Le matrici A_N e B_N definite in (4.21) sono matrici triangolari inferiori, a banda, di *Toeplitz*.

Definizione 4.1 Una matrice di *Toeplitz* ha elementi costanti lungo le sue diagonali:

$$T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ di Toeplitz} \quad \Leftrightarrow \quad t_{ij} = t_{j-i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

dove le costanti

$$t_{1-N}, \dots, t_0, \dots, t_{N-1}$$

sono gli elementi (costanti) lungo le corrispondenti diagonali $1 - N, \dots, 0, \dots, N - 1$. In questo caso, si utilizza la convenzione che l'indice, se negativo, denota una sottodiagonale, se nullo, la diagonale principale, se positivo, una sopradiagonale.

Inoltre, nella trattazione seguente, avremo bisogno anche di un'altra tipologia di matrici: le *M*-matrici.

Definizione 4.2 Una matrice del tipo

$$M = cI - B, \quad B \geq O, \quad c > \rho(B),$$

è detta *M*-matrice.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà di una *M*-matrice (farlo per esercizio nel caso, più semplice, in cui *B* sia strettamente triangolare. Il caso generale potrà essere dimostrato dopo che avremo visto le *funzioni di matrice*):

- $M^{-1} \succeq O$;
- $(M)_{ij} \leq 0$, se $i \neq j$;
- $(M)_{ii} > 0$.

Osservazione 4.4 Le matrici con inversa non negativa sono dette matrici monotone. Esse sono utili nella risoluzione di disequazioni lineari. Infatti, se

$$Ax \leq b,$$

ed *A* è una matrice monotona, allora

$$x \leq A^{-1}b.$$

Inoltre, se *A* e *B* sono monotone, con $A \leq B$, allora $B^{-1} \leq A^{-1}$.

Le *M*-matrici sono, pertanto, particolari matrici monotone.

Osserviamo che la matrice A_N definita nella (4.21) è nonsingolare, in quanto $\alpha_k \neq 0$ (vedi la normalizzazione (4.6)). Per dimostrare il Teorema 4.2, dobbiamo approfondire alcune proprietà delle matrici di Toeplitz triangolari inferiori a banda. Osserviamo che è possibile associare i polinomi (vedi (4.8))

$$\hat{\rho}(z) \equiv z^k \rho(z^{-1}) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^{k-i}, \quad \hat{\sigma}(z) \equiv z^k \sigma(z^{-1}) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^{k-i},$$

alle due matrici A_N e B_N , rispettivamente. Questo permette di riscriverle come:

$$A_N = \hat{\rho}(H_N), \quad B_N = \hat{\sigma}(H_N), \quad \text{con} \quad H_N = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1 \times N-k+1}.$$

Valgono le seguenti proprietà.

Lemma 4.1 A_N^{-1} è una matrice di Toeplitz triangolare inferiore.

Dimostrazione. Chiaramente, A_N^{-1} è triangolare inferiore. Dimostriamo che è anche una matrice di Toeplitz. A questo fine, denotiamo

$$x_{-j}, \dots, x_0, \dots, x_{N-k-j}$$

le componenti in colonna j di tale matrice. Esse saranno date da

$$x_i = 0, \quad i < 0, \quad x_0 = \alpha_k^{-1}$$

Le rimanenti componenti si otterranno per ricorrenza come:

$$x_\ell = -\alpha_k^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_{\ell-k+i}, \quad \ell \geq 1.$$

La tesi si completa osservando che

$$x_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

altri non è che l'elemento che si trova sulla sottodiagonale ℓ -esima, indipendentemente dall'indice di colonna j considerato. \square

Lemma 4.2 *Se $\rho(z)$ è un polinomio di Von Neumann, gli elementi di A_N^{-1} sono uniformemente limitati rispetto a N .*

Dimostrazione. Essendo A_N^{-1} una matrice di Toeplitz, dal precedente Lemma 4.1, è sufficiente considerare gli elementi sulla sua prima colonna. Questi ultimi soddisferanno l'equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+i-k} = 0, \quad n \geq 0,$$

con le condizioni iniziali

$$x_n = 0, \quad n < 0, \quad x_0 = \alpha_k^{-1}.$$

Poiché il polinomio associato all'equazione alle differenze è un polinomio di Von Neumann, gli elementi della successione $\{x_n\}_{n \geq 0}$ risulteranno essere uniformemente limitati rispetto ad n . \square

Lemma 4.3 *Sia data la matrice strettamente triangolare inferiore*

$$F_N = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (4.25)$$

Allora, considerando la norma 1 o ∞ ,

$$\forall \mu \neq 0: \quad \left\| \left(I_N - \frac{\mu}{N} F_N \right)^{-1} \right\| < e^{|\mu|}.$$

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando per induzione che:

$$F_N^j = \frac{1}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0^{(j-1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1^{(j-1)} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (N-2)^{(j-1)} & \dots & 1^{(j-1)} & 0^{(j-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

La tesi è ovviamente vera per $j = 1$. Si supponga vera per j e, per $j + 1$, segue:

$$\begin{aligned}
F_N^{j+1} &= F_N F_N^j \\
&= \frac{1}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0^{(j-1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1^{(j-1)} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (N-2)^{(j-1)} & \dots & 1^{(j-1)} & 0^{(j-1)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ & 0^{(j-1)} & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0^{(j-1)} + 1^{(j-1)} & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-3} i^{(j-1)} & \dots & 0^{(j-1)} + 1^{(j-1)} & 0^{(j-1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{j!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0^{(j)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1^{(j)} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (N-2)^{(j)} & \dots & 1^{(j)} & 0^{(j)} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da questo segue che $F_N^N = O$ e, inoltre,

$$\|F_N^j\| = \frac{1}{(j-1)!} \sum_{i=0}^{N-2} i^{(j-1)} = \frac{(N-1)^{(j)}}{j!} = \binom{N-1}{j}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\left\| \left(I_N - \frac{\mu}{N} F_N \right)^{-1} \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\mu}{N} \right)^j F_N^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{|\mu|}{N} \right)^j \|F_N^j\| \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{|\mu|}{N} \right)^j \binom{N-1}{j} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|\mu|^j (N-1)^{(j)}}{j! N^j} \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|\mu|^j}{j!} < e^{|\mu|}. \square
\end{aligned}$$

Lemma 4.4 Per ogni $\varepsilon \geq 0$ e sufficientemente piccolo, la matrice

$$M_N(\varepsilon) = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon N^{-1}) & & & & \\ -\varepsilon N^{-1} & (1 - \varepsilon N^{-1}) & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -\varepsilon N^{-1} & \dots & -\varepsilon N^{-1} & (1 - \varepsilon N^{-1}) & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

è una M -matrice e, inoltre, esiste $K = K(\varepsilon) > 0$, indipendente da N , tale che

$$\|M_N^{-1}(\varepsilon)\| \leq K(\varepsilon), \quad \forall N \geq 1.$$

Dimostrazione. La tesi è ovvia per $N = 1$. Per $N \geq 2$, poiché $\varepsilon \geq 0$ si assume essere sufficientemente piccolo, supporremo nel seguito che valga:

$$1 - \frac{\varepsilon}{N} \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{N} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.26)$$

Evidentemente,

$$M_N = (1 - \varepsilon N^{-1})I_N - \varepsilon N^{-1}F_N,$$

dove F_N è la matrice definita in (4.25). Inoltre, $F_N \geq 0$ e $\rho(F_N) = 0 < (1 - \varepsilon N^{-1})$. Pertanto $M_N(\varepsilon)$ è una M -matrice. Inoltre, per la (4.26) si ha

$$M_N \geq \frac{1}{2} [I_N - 2\varepsilon N^{-1}F_N] \equiv G_N,$$

con G_N a sua volta M -matrice. Pertanto,

$$0 \leq M_N^{-1} \leq G_N^{-1}.$$

Considerando la norma 1 o la norma ∞ , si ottiene quindi che, in virtù del Lemma 4.3:

$$\|M_N^{-1}\| \leq \|G_N^{-1}\| < 2e^{2\varepsilon}. \quad \square$$

Utilizzando questi risultati, possiamo ora dimostrare il Teorema 4.2.

Dimostrazione del Teorema 4.2. Dalle (4.20)–(4.24), segue che

$$A_N \mathbf{e}_N - hB_N(\hat{\mathbf{f}}_N - \mathbf{f}_N) = (\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_N) + \boldsymbol{\tau}_N,$$

dove

$$\mathbf{e}_N \equiv \hat{\mathbf{y}}_N - \mathbf{y}_N = \begin{pmatrix} e_k \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

è il vettore degli errori. Pertanto,

$$\mathbf{e}_N - hA_N^{-1}B_N(\hat{\mathbf{f}}_N - \mathbf{f}_N) = A_N^{-1}[(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_N) + \boldsymbol{\tau}_N].$$

Denotando con $|\mathbf{e}_N|$ il vettore le cui componenti sono i moduli di \mathbf{e}_N , ed utilizzando la stessa notazione per gli altri vettori e per le matrici, si ottiene:

$$|\mathbf{e}_N| \leq h |A_N^{-1}| |B_N| |\hat{\mathbf{f}}_N - \mathbf{f}_N| + |A_N^{-1}| (|\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_N| + |\boldsymbol{\tau}_N|). \quad (4.27)$$

Considerato che:

1. $|\hat{\mathbf{f}}_N - \mathbf{f}_N| \leq L|\mathbf{e}_N|$, essendo L la costante di Lipschitz di f ;

2. $|A_N^{-1}| \leq \alpha C_N$, per il risultato del Lemma 4.2, dove α è una maggiorazione, indipendente da N , per il modulo del generico elemento di A_N^{-1} , e

$$C_N = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-k+1 \times N-k+1};$$

3. $|A_N^{-1}| |B_N| \leq \alpha \beta C_N$, per motivi analoghi al precedente punto 2, avendo posto

$$\beta = \sum_{i=0}^k |\beta_i|;$$

4. $|A_N^{-1}| |\tau_N| \leq O(h^p)$, in virtù del punto 2, considerando che $Nh = T - t_0$;

5. $|A_N^{-1}| |\hat{\eta}_N - \eta_N| \leq O(h^r)$, essendo i dati iniziali noti con un errore $O(h^r)$;

dalla (4.27) si ottiene

$$M_N |\mathbf{e}_N| \leq \max\{O(h^r), O(h^p)\} = O(h^{\min\{r,p\}}),$$

dove (vedi (4.2))

$$M_N = I_N - (h\alpha\beta)C_N = I_N - \frac{\alpha\beta(T-t_0)}{N}C_N. \quad (4.28)$$

Pertanto, considerando la norma ∞ , per $h = (T - t_0)/N$ sufficientemente piccolo, dal Lemma 4.28 si ottiene, tenendo conto del fatto che $M_N^{-1} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_N\| &\leq \|M_N^{-1} O(h^{\min\{r,p\}})\| \leq \|M_N^{-1}\| O(h^{\min\{r,p\}}) \\ &\leq 2e^{2\alpha\beta(T-t_0)} O(h^{\min\{r,p\}}) = O(h^{\min\{r,p\}}). \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Alcuni esempi di metodi LMF convergenti

Esaminiamo, in questa sezione, alcune classi di metodi che risultano essere 0-stabili e consistenti e, pertanto, convergenti.

I metodi di Adams

Per questi metodi, il polinomio $\rho(z)$ è della forma

$$\rho(z) = z^{k-1}(z-1).$$

Pertanto esso ha $k-1$ radici nello 0 ed una uguale ad 1. Il metodo è perciò 0-stabile per costruzione. I coefficienti del polinomio $\sigma(z)$ sono scelti in modo da ottenere l'ordine massimo, distinguendo, tuttavia, tra i metodi espliciti e quelli impliciti.

I metodi di *Adams-Bashforth* sono espliciti (e pertanto $\beta_k = 0$): essi hanno ordine $p = k$. Vediamone alcuni.

- $k = 1$: si ottiene il *metodo di Eulero esplicito*, che ha ordine 1,

$$y_{n+1} - y_n = hf_n. \quad (4.29)$$

- $k = 2$: si ottiene il *metodo di Adams-Bashforth* di ordine 2,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2} (3f_{n+1} - f_n). \quad (4.30)$$

I metodi di *Adams-Moulton* sono impliciti ed hanno ordine $p = k + 1$. Vediamone alcuni esempi.

- $k = 1$: si ottiene il *metodo dei trapezi*, che ha ordine 2,

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n). \quad (4.31)$$

- $k = 2$: si ottiene il *metodo di Adams-Moulton* di ordine 3,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12} (5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n). \quad (4.32)$$

Formule di Newton-Cotes

Queste formule si ottengono approssimando il teorema fondamentale del calcolo mediante una formula di quadratura. Esse sono del tipo:

$$y_{n+k} - y_n = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}. \quad (4.33)$$

Il polinomio $\rho(z) = z^k - 1$ è, quindi, un polinomio di Von Neumann, essendo le sue radici le radici k -esime dell'unità. Se il metodo ha almeno ordine 1 sarà, dunque, convergente.

Per $k = 1$ si ottiene la formula dei trapezi vista innanzi. Per $k = 2$ si ottiene il *metodo di Simpson*

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3} (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n), \quad (4.34)$$

che è implicito e si verifica avere ordine 4. Se si utilizza la regola dei rettangoli, si ottiene invece il *metodo del mid-point*:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}, \quad (4.35)$$

che è esplicito ed ha ordine 2.

Backward Differentiation Formulae (BDF)

Questi metodi sono nella forma:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h\beta_k f_{n+k}, \quad (4.36)$$

con i coefficienti $\{\alpha_i\}$ univocamente determinati dall'imporre l'ordine massimo $p = k$. Questi metodi risultano essere impliciti; sono, inoltre, 0-stabili fino a $k = 6$. Vediamone alcuni:

- $k = 1$: si ottiene il *metodo di Eulero implicito*,

$$y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}, \quad (4.37)$$

che ha ordine 1.

- $k = 2$: si ottiene la BDF di ordine 2,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}, \quad (4.38)$$

che si verifica essere 0-stabile, in quanto $\rho(z) = (z-1)(z-\frac{1}{3})$.

4.4 Stabilità per h fissato

Nonostante il risultato negativo dato dalla prima barriera di Dahlquist, abbiamo visto che esistono metodi 0-stabili con un ordine di accuratezza arbitrariamente elevato (e, pertanto, convergenti). Nell'analisi su cui si basa la proprietà di 0-stabilità, tuttavia, si è assunto di poter far tendere il passo h a 0, aumentando il numero N dei punti della *mesh*. Tuttavia, per alcuni problemi, $T \rightarrow \infty$. Questo significa che, anche facendo tendere N a ∞ , non è più possibile assumere il passo h infinitesimo.²

Ad esempio, se consideriamo il seguente esempio di *equazione logistica* (esamineremo questa equazione più in dettaglio successivamente in Sezione 8.3.1),

$$y' = 10y - 2y^2, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad (4.39)$$

si verifica che la soluzione esatta del problema è data da

$$y(t) = \frac{5}{1 + 4e^{-10t}} \rightarrow 5, \quad t \rightarrow \infty.$$

Tuttavia, se utilizziamo il metodo del mid-point (che è 0-stabile ed ha ordine 2), con passo $h = 0.01$, sull'intervallo $[0, 2.5]$, si ottiene il risultato illustrato a sinistra in Figura 4.1: come si vede, per $t \approx 1.5$ compaiono delle oscillazioni spurie nella soluzione numerica, che si amplificano successivamente. Se riduciamo il passo di integrazione al valore $h = 0.001$, lo stesso fenomeno si ripresenta a partire da $t \approx 2$, come si evince dal grafico a destra in Figura 4.1. In generale, anche se riducessimo il passo h ulteriormente, il problema si ripresenterebbe considerando un intervallo di integrazione più ampio.

Ci troviamo, pertanto, a dover discutere l'*equazione dell'errore* (4.18) per h fissato. Questo è, in generale, un compito assai arduo. Tuttavia, la trattazione diviene notevolmente più semplice nel caso in cui la (4.1) è data dall'*equazione test*³

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \Re(\lambda) < 0. \quad (4.40)$$

Infatti, in questo caso la soluzione è

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

che, pertanto, ha l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile. Di conseguenza, se anche la soluzione discreta, ottenuta risolvendo l'equazione

$$(\rho(E) - q\sigma(E))y_n = 0, \quad q = h\lambda, \quad (4.41)$$

avesse l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile, ovvero

$$y_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.42)$$

²A questo argomento, come è evidente, si aggiungono anche considerazioni di efficienza computazionale.

³Approfondiremo il significato dell'equazione test (4.40) nel Capitolo 7.

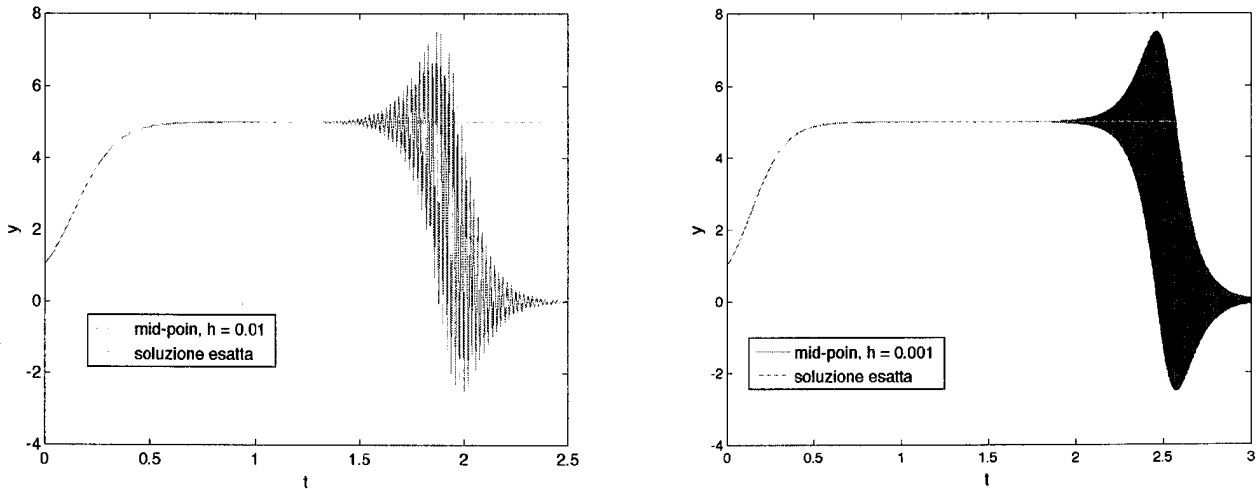


Figura 4.1: Problema (4.39) approssimato con il metodo del mid-point con passo $h = 0.01$ (a sinistra) e con passo $h = 0.001$ (a destra): sono evidenti, in entrambi i casi, le oscillazioni spurie nella approssimazione numerica.

allora necessariamente anche l'equazione dell'errore (4.18), che si riduce a

$$(\rho(E) - q\sigma(E))e_n = \tau_n,$$

sarebbe tale che

$$e_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

In tal caso, si dirà che il metodo (ρ, σ) è *assolutamente stabile* in $q = h\lambda$. Essendo l'equazione (4.41) lineare a coefficienti costanti, risulta dimostrato il seguente risultato.

Teorema 4.4 *La soluzione dell'equazione (4.41) soddisfa (4.42) se e solo se il polinomio di stabilità*

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z) \quad (4.43)$$

è un polinomio di Schur.

Definizione 4.3 *La regione*

$$\mathcal{D} = \{q \in \mathbb{C} : \pi(z, q) \text{ è un polinomio di Schur}\}, \quad (4.44)$$

è detta regione di assoluta stabilità del metodo (ρ, σ) .

Richiedendo che (4.42) sia vera per ogni $h > 0$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^-$,⁴ si capisce il senso della seguente, ulteriore, definizione.

Definizione 4.4 *Un metodo LMF è detto A-stabile se $\mathbb{C}^- \subseteq \mathcal{D}$. Nel caso in cui $\mathbb{C}^- \equiv \mathcal{D}$, il metodo si dirà perfettamente (o precisamente) A-stabile.⁵*

Chiaramente, la proprietà di A-stabilità è una proprietà che lascia molta libertà nella scelta del passo h e, pertanto, è una proprietà di rilievo per un metodo LMF, come argenteremo ulteriormente nel seguito. Tuttavia, vale il seguente risultato negativo.

⁴ \mathbb{C}^- denota il semipiano complesso a parte reale negativa.

⁵La denominazione *perfettamente A-stabile* deriva dal fatto che, in questo caso, la soluzione discreta ha sempre lo stesso comportamento qualitativo di quella continua.

Teorema 4.5 (seconda barriera di Dahlquist) *Non esistono metodi LMF A -stabili espliciti. Inoltre, l'ordine massimo di un LMF A -stabile è 2.*

Osservazione 4.5 *È evidente che, nel caso un metodo non sia A -stabile, una regione di assoluta stabilità più ampia consente l'utilizzo di un passo h maggiore, fissato $\lambda \in \mathbb{C}^-$, rispetto ad un metodo con una regione di assoluta stabilità più piccola.*

Calcoliamo ora la regione di assoluta stabilità di qualcuno dei metodi su esposti.

I due metodi di Eulero

Per il metodo di Eulero esplicito (4.29), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = z - (1 + q).$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = |1 + q| < 1,$$

si ottiene che la regione di assoluta stabilità è data dal cerchio di centro -1 e raggio 1 del piano complesso, come si vede raffigurato a sinistra in Figura 4.3.

Per il metodo di Eulero implicito (4.37), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = (1 - q)z - 1.$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = |1 - q|^{-1} < 1,$$

si ottiene che la regione di assoluta stabilità è data dal complemento in \mathbb{C} del cerchio chiuso di centro 1 e raggio 1 del piano complesso, come si vede raffigurato a destra in Figura 4.3. Si deduce che il metodo di Eulero implicito è A -stabile.

Il metodo dei trapezi

Per il metodo dei trapezi (4.31), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = \left(1 - \frac{q}{2}\right)z - \left(1 + \frac{q}{2}\right).$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = \frac{|2 + q|}{|2 - q|} < 1,$$

si ottiene $\Re(q) < 0$, ovvero

$$\mathcal{D} \equiv \mathbb{C}^-.$$

Pertanto, il metodo è perfettamente A -stabile.

I metodi di Simpson e del *mid-point*

Per il metodo del *mid-point* (4.35), il polinomio di stabilità è

$$\pi(z, q) = z^2 - 2qz - 1.$$

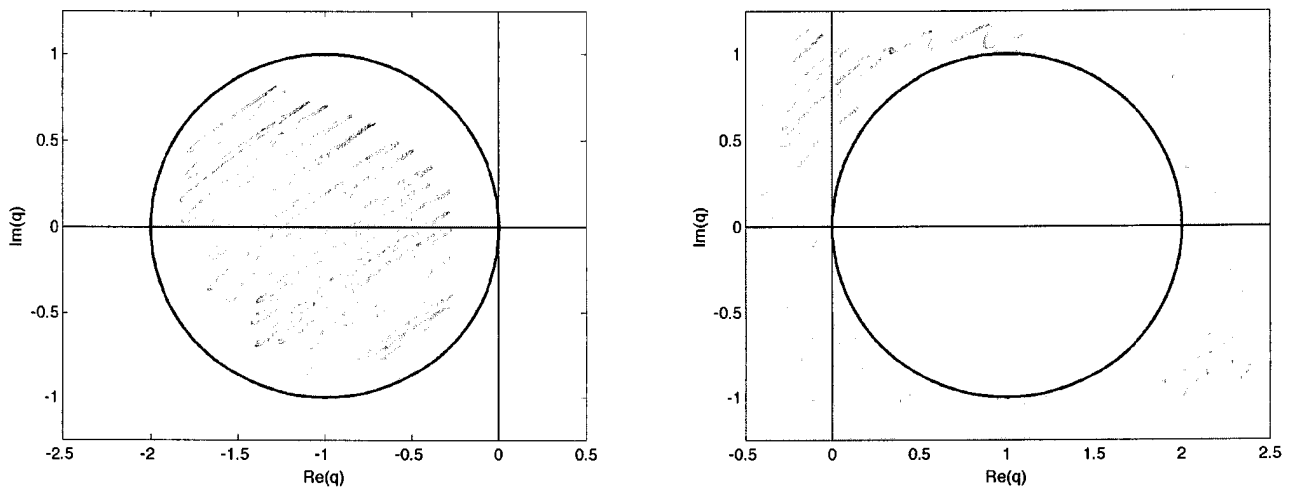


Figura 4.2: Regioni di assoluta stabilità dei metodi di Eulero esplicito (a sinistra) ed implicito (a destra), rispettivamente dati da (4.29) e (4.37).

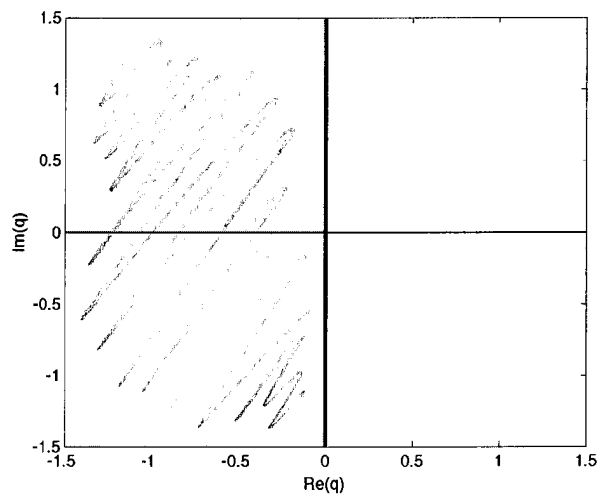


Figura 4.3: Regione di assoluta stabilità del metodo dei trapezi (4.31): si tratta di un metodo *perfettamente* A -stabile.

Applicando il primo criterio di Schur, si vede che la regione di assoluta stabilità non ha punti interni. Tuttavia, potrebbe avere una frontiera, laddove il polinomio fosse di Von Neumann. Il polinomio ridotto si vede essere dato da:

$$\pi^{(1)}(z, q) = -2(q + \bar{q}) \equiv -4\Re(q).$$

Imponendo, per il secondo criterio di Schur, che esso sia identicamente nullo, si ottiene $\Re(q) = 0$. Pertanto avremo dei punti dell'asse immaginario. Imponendo, inoltre, che

$$\pi'(z, q) = 2(z - q)$$

sia un polinomio di Schur, si ottiene $|q| < 1$. Pertanto, si conclude che

$$\bar{\mathcal{D}} = \{ix : -1 < x < 1\}.$$

Per il metodo di Simpson (4.34), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = \left(1 - \frac{q}{3}\right) z^2 - \frac{4}{3} qz - \left(1 + \frac{q}{3}\right).$$

Usando argomenti simili a quelli utilizzati per il metodo del *mid-point*, si arriva a concludere che

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ix : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\right\}.$$

4.5 Il *boundary locus* di un metodo LMF

Per metodi (ρ, σ) più generali, potrebbe essere complesso determinare la corrispondente regione di assoluta stabilità. Per semplificare questo compito, sarà conveniente ricorrere alla tecnica che utilizza il *boundary locus* del metodo. Quest'ultimo è definito come:

$$\Gamma = \left\{q(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Infatti, essendo le radici di un polinomio funzioni analitiche dei suoi coefficienti, segue che affinché il numero di radici all'interno del cerchio aperto unitario vari, qualcuna di esse deve attraversare la circonferenza unitaria. Poiché Γ è il luogo dei punti del piano complesso q per cui il polinomio di stabilità ha almeno una radice di modulo 1, segue che Γ dividerà il piano complesso q in regioni connesse, all'interno del quale il numero di radici all'interno del cerchio unitario aperto è costante. Pertanto, basterà applicare il primo criterio di Schur ad un qualunque punto interno di ciascuna di tali regioni, per stabilire quale (o quali) di esse costituisca la regione di assoluta stabilità del metodo. A titolo di esempio, in Figura 4.4 riportiamo le regioni di assoluta stabilità calcolate con il *boundary locus*, per i metodi di Adams-Bashforth di ordine 2, per il metodo di Adams-Moulton di ordine 3. Entrambi risultano avere una regione di assoluta stabilità limitata. In Figura 4.5 è raffigurata, invece, la regione di assoluta stabilità della BDF di ordine 2. Quest'ultimo metodo risulta essere *A*-stabile.

Più in generale, dato un polinomio $p(z) \in \Pi_k$, se ne definisce il *tipo* come la terna (k_1, k_2, k_3) tale che:

- k_1 è il numero delle radici di $p(z)$ (contate con la loro molteplicità) di modulo *minore* di 1;

- k_2 è il numero delle radici di $p(z)$ (al solito, contate con la loro molteplicità) di modulo uguale a 1;
- k_3 è il numero delle radici di $p(z)$ (sempre contate con la loro molteplicità) di modulo maggiore di 1.

Pertanto,

$$k_1, k_2, k_3 \geq 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k.$$

In particolare:

- i polinomi di tipo $(k, 0, 0)$ sono i polinomi di Schur;
- i polinomi di tipo $(k_1, k_2, 0)$, con le k_2 radici di modulo 1 semplici, sono i polinomi di Von Neumann.

Da quanto su esposto, il *boundary locus* di un metodo LMF suddivide il piano complesso q in un numero finito di regioni connesse in cui il tipo del polinomio (che sarà del tipo $(k_1, 0, k_2)$ ⁶) è costante. L'unione delle regioni in cui il polinomio ha tipo $(k, 0, 0)$ costituiscono la regione di assoluta stabilità del metodo. Se ne deduce che

$$\partial\mathcal{D} \subseteq \Gamma.$$

Osserviamo che, per un metodo consistente e 0-stabile, deve aversi

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1) \neq 0,$$

e, quindi,

$$q(0) = \frac{\rho(1)}{\sigma(1)} = 0 \in \partial\mathcal{D}.$$

Cioè, l'origine (del piano q) appartiene al *boundary locus* del metodo, nonché alla frontiera della sua regione di assoluta stabilità. Inoltre, l'asse immaginario risulta essere tangente al *boundary locus*. Infatti,

$$q'(0) = \frac{\rho'(e^{i\theta})\sigma(e^{i\theta}) - \rho(e^{i\theta})\sigma'(e^{i\theta})}{\sigma(z)^2} i \Big|_{\theta=0} = i.$$

Pertanto,

$$q(\theta) \approx i\theta, \quad \theta \approx 0.$$

Concludiamo questa sezione osservando che:

$$\overline{q(\theta)} = \overline{\left(\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \right)} = \frac{\rho(e^{-i\theta})}{\sigma(e^{-i\theta})} = q(-\theta) = q(2\pi - \theta).$$

Pertanto Γ è una curva simmetrica rispetto all'asse reale.

⁶Infatti, radici di modulo 1 esistono solo sul *boundary locus* del metodo.

4.6 L-stabilità

Vogliamo ora mettere in evidenza una differenza esistente tra i metodi A -stabili finora esaminati. Ovvero, il metodo dei trapezi (4.31) ed i metodi di Eulero implicito (4.37) e BDF di ordine 2 (4.38). Per il metodo dei trapezi, si ha che, applicato all'equazione test (4.40), si ottiene:

$$y_n(q) = \left(\frac{2+q}{2-q} \right)^n y_0 \rightarrow (-1)^n y_0, \quad q \rightarrow \infty.$$

In questo caso, la soluzione discreta tenderà ad oscillare, assumendo segno discorde, senza smorzarsi, quando $q = h\lambda$ tende a ∞ . Viceversa, per il metodo di Eulero implicito, si ottiene:

$$y_n(q) = \left(\frac{1}{1-q} \right)^n y_0 \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty.$$

Anche per la BDF di ordine 2 si ottiene facilmente che

$$y_n(q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty. \tag{4.45}$$

Chiaramente, la (4.45) descrive il comportamento qualitativamente corretto. Si capisce, pertanto, il senso della seguente proprietà.

Definizione 4.5 *Se un metodo A -stabile soddisfa la (4.45), allora esso si dirà L -stabile.*

Osservazione 4.6 *Per quanto su esposto, il metodo dei trapezi non è L -stabile, mentre lo sono le BDF di ordine 1 e 2.*

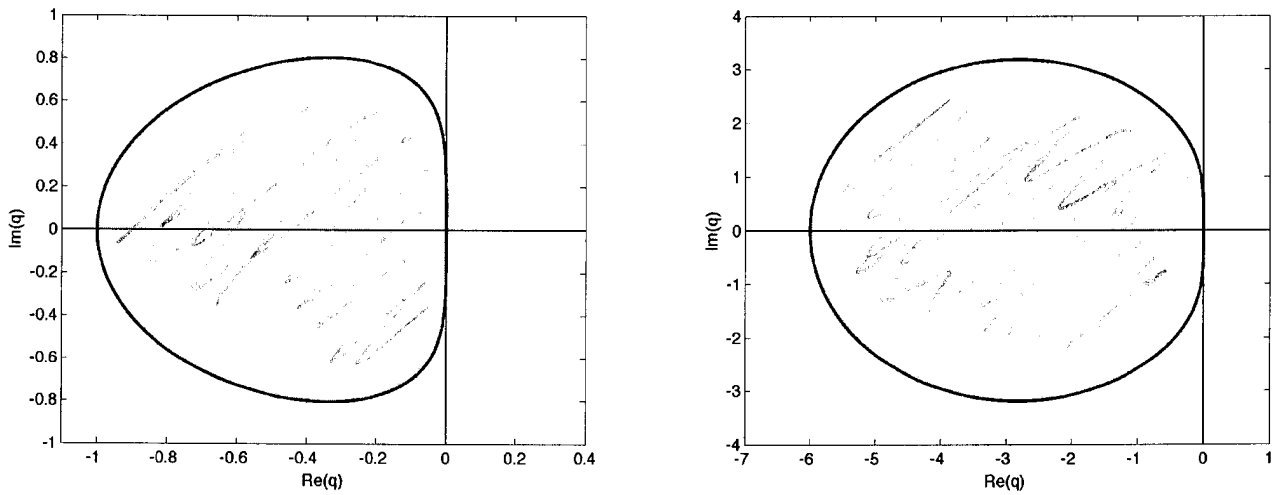


Figura 4.4: Regione di assoluta stabilità dei metodi di Adams-Bashforth (4.30) di ordine 2 (a sinistra) e di Adams-Moulton (4.32) di ordine 3 (a destra).

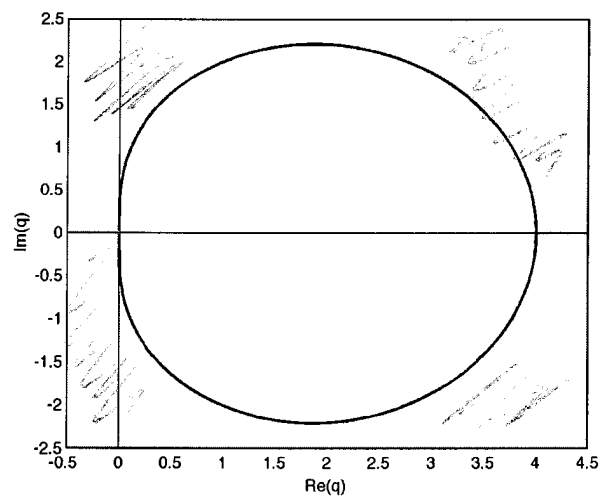


Figura 4.5: Regione di assoluta stabilità della BDF (4.38) di ordine 2.