

## Capitolo 3

# Equazioni alle differenze lineari

Le equazioni alle differenze di cui ci siamo occupati nel precedente capitolo erano del tipo

$$y_{n+1} + p_n y_n = g_n \quad n \geq n_0, \quad y_{n_0} \text{ assegnata}, \quad (3.1)$$

in cui  $\{p_n\}$  e  $\{g_n\}$  sono successioni note. La (3.1) costituisce una *equazione alle differenze lineare del primo ordine*. Più in generale, date le successioni  $\{p_i(n)\}$ ,  $i = 0, \dots, k$ , e  $\{g_n\}$  con

$$p_0(n) \equiv 1, \quad p_k(n) \neq 0, \quad n \geq n_0, \quad (3.2)$$

si definisce una *equazione alle differenze lineare (non omogenea) di ordine  $k$*  come:

$$\sum_{i=0}^k p_i(n) y_{n+k-i} = g_n, \quad n \geq n_0. \quad (3.3)$$

Una successione  $\{y_n\}$  che soddisfi la (3.3) per ogni  $n \geq n_0$  si dirà *soluzione* della equazione. Si dimostra facilmente il seguente risultato.

**Teorema 3.1** *Una soluzione  $\{y_n\}$  della (3.3) è univocamente determinata dalle  $k$  condizioni iniziali:*

$$y_{n_0} = c_0, \quad y_{n_0+1} = c_1, \quad \dots, \quad y_{n_0+k-1} = c_{k-1}. \quad (3.4)$$

Dimostrazione. Immediatamente per induzione, osservando che:

$$y_{n+k} = g_n - \sum_{i=1}^k p_i(n) y_{n+k-i}, \quad n \geq n_0,$$

essendo  $p_0(n) \equiv 1$ , per ogni  $n \geq n_0$ .  $\square$

Introduciamo ora l'operatore

$$L y_n = \sum_{i=0}^k p_i(n) y_{n+k-i}.$$

Si dimostra facilmente che l'operatore è *lineare*, ovvero:

$$L(\alpha y_n + \beta z_n) = \alpha L y_n + \beta L z_n,$$

comunque si assegnino le successioni  $\{y_n\}$  e  $\{z_n\}$  e gli scalari  $\alpha$  e  $\beta$ .

L'operatore  $L$  consente di riscrivere la (3.3) come

$$L y_n = g_n, \quad n \geq n_0. \quad (3.5)$$

Si definisce, inoltre, l'equazione omogenea associata alla (3.5):

$$L y_n = 0, \quad n \geq n_0. \quad (3.6)$$

Sia  $\mathbb{S}$  l'insieme delle sue soluzioni:

$$\mathbb{S} = \{\{y_n\} : L y_n = 0, n \geq n_0\}.$$

Vale il seguente risultato.

**Teorema 3.2**  $\mathbb{S}$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $k$ .

Dimostrazione. Il fatto che  $\mathbb{S}$  sia uno spazio vettoriale, deriva dalla linearità di  $L$  e osservando che la successione nulla è soluzione della (3.6). Che la dimensione di questo spazio sia  $k$  discende dal Teorema 3.1, osservando che ogni vettore

$$\mathbf{c} = (c_0 \ \dots \ c_{k-1})^T$$

definito dalle condizioni iniziali (3.4) si può ottenere come combinazione dei versori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^k$ . Pertanto, denotando con  $y_n(n_0, \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , la soluzione della (3.6) che assume le  $k$  condizioni iniziali

$$y_{n_0-1+j}(n_0, \mathbf{e}_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (3.7)$$

si verifica facilmente che la soluzione della (3.6) che assume le  $k$  condizioni iniziali (3.4) è data da:

$$y_n = \sum_{i=1}^k c_{i-1} y_n(n_0, \mathbf{e}_i), \quad n \geq n_0.$$

La tesi si completa osservando che le  $k$  soluzioni  $\{y_n(n_0, \mathbf{e}_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sono *linearmente indipendenti*, ovvero:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_n(n_0, \mathbf{e}_i) = 0, \quad n \geq n_0, \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Infatti, se si avesse

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_n(n_0, \mathbf{e}_i) = 0, \quad n \geq n_0,$$

allora si otterrebbe:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n_0-1+j}(n_0, \mathbf{e}_i) = \alpha_j \underbrace{y_{n_0-1+j}(n_0, \mathbf{e}_j)}_{=1} = \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

□

L'equazione omogenea (3.6) associata alla (3.5) permette di ottenere la soluzione generale di quest'ultima, mediante il seguente risultato.

**Teorema 3.3** Siano  $\{y_n\}$  e  $\{z_n\}$  due generiche soluzioni della (3.5). Allora la successione  $v_n = y_n - z_n$ ,  $n \geq n_0$ , è soluzione della (3.6).

Dimostrazione. Infatti, si ha:

$$L v_n = L(y_n - z_n) = L y_n - L z_n = g_n - g_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

□

Da questo risultato discende, infine, l'espressione della *soluzione generale* della (3.5).

**Corollario 3.1** Siano  $\{f_n^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , soluzioni linearmente indipendenti della (3.6). Sia, inoltre,  $\{\bar{y}_n\}$  una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (3.5). Allora, ogni altra soluzione di quest'ultima equazione, si può scrivere come

$$y_n = \bar{y}_n + \sum_{i=1}^k \alpha_i f_n^{(i)}, \quad n \geq n_0, \quad (3.8)$$

per  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ .

Dimostrazione. Infatti, se  $\{y_n\}$  è una generica soluzione della (3.5), allora  $L(y_n - \bar{y}_n) = 0$ ,  $n \geq n_0$ , in virtù del Teorema 3.3. Pertanto esse si potranno esprimere come combinazione lineare di  $k$  soluzioni linearmente indipendenti appartenenti a  $\mathbb{S}$  (vedi Teorema 3.2). □

Affrontiamo ora il problema di calcolare gli scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  in (3.8) in funzione delle condizioni iniziali (3.4). A tal fine, date le funzioni  $\{f_n^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , definiamo la *matrice di Casorati*

$$C(n) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} & \dots & f_n^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+k-1}^{(1)} & \dots & f_{n+k-1}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad n \geq n_0, \quad (3.9)$$

avente dimensione  $k \times k$ . Vale il seguente risultato.

**Teorema 3.4** Se esiste un valore  $\bar{n}$  per cui  $\det C(\bar{n}) \neq 0$ , allora le funzioni  $\{f_n^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Se si avesse

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_n^{(i)} = 0, \quad n \geq n_0,$$

allora, scrivendo l'uguaglianza per  $n = \bar{n}, \dots, \bar{n} + k - 1$ , si otterrebbe il sistema lineare

$$C(\bar{n}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo  $C(\bar{n})$  nonsingolare, seguirebbe pertanto che  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . □

Nel caso in cui le funzioni che definiscono la matrice di Casorati (3.9) siano soluzioni della (3.6), esiste una relazione tra i determinanti di  $C(n)$  al variare di  $n$ . Infatti, poiché

$$L f_n^{(\ell)} = \sum_{i=0}^k p_i(n) f_{n+k-i}^{(\ell)} = 0, \quad n \geq n_0, \quad \ell = 1, \dots, k,$$

segue (ricordare che  $p_0(n) \equiv 1$ )

$$f_{n+k}^{(\ell)} = - \sum_{i=1}^k p_i(n) f_{n+k-i}^{(\ell)}, \quad n \geq n_0, \quad \ell = 1, \dots, k.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{pmatrix} f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+k}^{(1)} & \cdots & f_{n+k}^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ -p_k(n) & \cdots & -p_2(n) & -p_1(n) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_n^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+k-1}^{(1)} & \cdots & f_{n+k-1}^{(k)} \end{pmatrix} \\ &\equiv F(n)C(n), \end{aligned} \tag{3.10}$$

dove  $F(n)$  è una *matrice di Frobenius* o *matrice di compagnia*. Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

**Lemma 3.1** *Il polinomio caratteristico della matrice  $F(n)$  definita nella (3.10) è*

$$p(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=1}^k p_i(n) \lambda^{k-i}.$$

Questo ci permette di dimostrare facilmente il seguente teorema.

**Teorema 3.5** *Se esiste un qualunque valore  $\bar{n}$  per cui la matrice  $C(\bar{n})$  associata a  $k$  soluzioni della (3.6) è nonsingolare, allora  $\det C(n) \neq 0$ , per ogni  $n \geq n_0$ . Le soluzioni sono, pertanto, linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. La tesi segue facilmente osservando che, dalla (3.10) segue che

$$\det C(n+1) = \det(F(n)C(n)) = \det F(n) \det C(n).$$

Inoltre, per ogni  $n \geq n_0$ ,  $\det F(n) = (-1)^k p_k(n) \neq 0$ , per l'assunzione (3.2).  $\square$

In questo caso, inoltre, il Teorema 3.4 si modifica come segue.

**Corollario 3.2**  *$k$  soluzioni della (3.6) sono linearmente indipendenti se e solo se*

$$\det C(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

**Dimostrazione.** Una implicazione segue dal Teorema 3.4. L'altra dal fatto che, come visto nella dimostrazione del Teorema 3.5,

$$\det C(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0 \iff \exists \bar{n} : \det C(\bar{n}) \neq 0.$$

Pertanto, se fosse singolare una qualunque matrice di Casorati, sia essa  $C(\bar{n})$ , lo sarebbero tutte, per ogni  $n \geq n_0$ . In questo caso, tuttavia, le  $k$  soluzioni non sarebbero linearmente indipendenti.  $\square$

**Osservazione 3.1** Il Teorema 3.5 conferma che le soluzioni della (3.6)  $\{y_n(n_0, \mathbf{e}_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , definite in (3.7) sono linearmente indipendenti. Infatti, in questo caso, si ha:  $C(n_0) = I_k$ .

I precedenti risultati permettono di ottenere i coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  nella (3.8) che individuano la soluzione della (3.5) soddisfacente le condizioni iniziali (3.4). Vale, infatti, il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata come semplice esercizio.

**Teorema 3.6** Siano  $\{f_n^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , soluzioni linearmente indipendenti della (3.6) e  $\{\bar{y}_n\}$  una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (3.5). Allora la soluzione di (3.5) che soddisfa le condizioni iniziali (3.4) è data da

$$y_n = \bar{y}_n + \sum_{i=1}^k \alpha_i f_n^{(i)}, \quad n \geq n_0,$$

in cui i coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sono univocamente determinati dal sistema lineare

$$C(n_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 - \bar{y}_{n_0} \\ \vdots \\ c_{k-1} - \bar{y}_{n_0+k-1} \end{pmatrix},$$

essendo  $C(n_0)$  la matrice di Casorati (3.9) valutata in  $n = n_0$ .

### 3.1 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Il problema di determinare la soluzione generale di una equazione alle differenze lineari è grandemente semplificato nel caso in cui questa sia a coefficienti costanti, ovvero  $p_i(n) \equiv p_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . In tal caso, l'equazione diviene:

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = g_n, \quad n \geq n_0. \quad (3.11)$$

Al solito, una sua soluzione è univocamente determinata dalla  $k$  condizioni iniziali

$$y_{n_0}, y_{n_0+1}, \dots, y_{n_0+k-1}. \quad (3.12)$$

L'equazione omogenea associata alla (3.11) è:

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = 0, \quad n \geq n_0, \quad (3.13)$$

di cui ricerchiamo una soluzione nella forma

$$y_n = z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sostituendo nella (3.13), si ottiene

$$z^n \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} = 0, \quad n \geq n_0,$$

da cui si ottiene che  $z$  deve essere una radice del *polinomio caratteristico*,

$$p(z) = \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i}, \quad (3.14)$$

associato alla (3.13). Supponiamo, per il momento che le sue radici  $z_1, \dots, z_k$  siano semplici. In tal caso, vale il seguente risultato.

**Teorema 3.7** *Se le  $k$  radici  $z_1, \dots, z_k$  del polinomio caratteristico (3.14) sono semplici, allora le soluzioni*

$$y_n^{(i)} = z_i^n, \quad i = 1, \dots, k,$$

*sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Infatti, la corrispondente matrice di Casorati, valutata in  $n = 0$ , è una matrice di Vandermonde,

$$C(0) = \begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_k^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{pmatrix},$$

che risulta essere nonsingolare, essendo le  $\{z_i\}$  distinte tra loro.  $\square$

Pertanto, nel caso in cui le radici del polinomio caratteristico (3.14) sono semplici, la soluzione generale della (3.13) sarà della forma

$$y_n = \sum_{i=1}^k c_i z_i^n, \quad n \geq n_0. \quad (3.15)$$

Al solito, le costanti  $c_1, \dots, c_k$  saranno univocamente individuate dalla scelta delle  $k$  condizioni iniziali (3.12).

Vediamo ora alcune applicazioni di quanto appena esposto. Successivamente, tratteremo il caso in cui il polinomio caratteristico (3.14) possiede radici multiple.

### I numeri di Fibonacci

Consideriamo l'equazione

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad n \geq 0. \quad (3.16)$$

Assegnando le condizioni iniziali

$$y_0 \equiv F_0 = 1, \quad y_1 \equiv F_1 = 1,$$

si ottiene la famosa *successione di Fibonacci*  $\{F_n\}$ :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Cerchiamo di scrivere l'espressione del generico numero di Fibonacci. Il polinomio caratteristico associato all'equazione (3.16) è

$$p(z) = z^2 - z - 1,$$

le cui radici sono:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

In particolare,  $z_1 = 1.618\dots$  è nota come *rapporto aureo*, mentre  $z_2 = -z_1^{-1} = 1 - z_1 = -0.618\dots$ . La soluzione generale sarà, pertanto,

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n, \quad n \geq 0. \quad (3.17)$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$c_1 = \frac{z_1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{z_2}{\sqrt{5}}$$

e, quindi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0.$$

Si verifica facilmente che:

- in generale, se  $c_1 \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = z_1$ ;
- per  $n \gg 1$ :  $F_n \approx z_1^{n+1} / \sqrt{5}$ .

### Ordine di convergenza del metodo della secante

L'equazione (3.16) permette di ottenere l'ordine di convergenza del *metodo delle secanti* per l'approssimazione della radice  $\bar{x}$ , che supporremo semplice, di una funzione  $f(x)$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]}, \quad n \geq 1,$$

dove  $f[x_{n-1}, x_n]$  è la *differenza divisa* di  $f$  sulle ascisse in argomento. Supponendo che

$$e_n \equiv x_n - \bar{x} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

si ottiene:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = x_n - \bar{x} - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]}$$

$$\begin{aligned}
&= e_n - \frac{f(x_n) - \overbrace{f(\bar{x})}^{=0}}{f[x_{n-1}, x_n]} = e_n \left( 1 - \frac{f[x_n, \bar{x}]}{f[x_{n-1}, x_n]} \right) \\
&= \frac{e_n}{f[x_{n-1}, x_n]} (f[x_{n-1}, x_n] - f[x_n, \bar{x}]) \\
&= e_n e_{n-1} \frac{f[x_{n-1}, x_n, \bar{x}]}{f[x_{n-1}, x_n]}.
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n-1}e_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f[x_{n-1}, x_n, \bar{x}]|}{|f[x_{n-1}, x_n]|} = \frac{|f''(\bar{x})|}{2|f'(\bar{x})|} \equiv M.$$

Per  $n \gg 1$ , si avrà quindi, approssimativamente,

$$M|e_{n+1}| = M^2|e_n||e_{n-1}|.$$

Ponendo  $y_n = \log(M|e_n|)$ , si ottiene, quindi, la (3.16). Per quanto visto innanzi, si ottiene quindi che

$$z_1 \equiv \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

da cui si ottiene, infine,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{z_1}} = M^{z_1-1},$$

da cui si deduce che l'ordine del metodo è  $z_1 = 1.618\dots$

### Capacità di un canale

Supponiamo di avere un canale di trasmissione dati, su cui si possono inviare due tipi di segnale, uno di lunghezza 1, l'altro di lunghezza 2 (si tratta di segnali a tempo discreto). Il problema che ci poniamo è quello di calcolare quanti combinazioni di segnali elementari si possono inviare in un tempo (discreto)  $n$ . Indichiamo con  $S_n$  tale numero. Proviamo a ragionare per induzione su  $n$ :

- per  $n = 1$ ,  $S_1 = 1$ , in quanto posso spedire solo il segnale di lunghezza 1;
- per  $n = 2$ ,  $S_2 = 2$ , in quanto posso mandare o 2 segnali di lunghezza 1, oppure 1 di lunghezza 2;
- per  $n \geq 3$ , si verifica facilmente che

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2},$$

in quanto ogni combinazione di lunghezza  $n$  finirà con il segnale di lunghezza 1 (e vi sono  $S_{n-1}$  di tali combinazioni) ovvero con il segnale di lunghezza 2 (e vi sono  $S_{n-2}$  combinazioni di questo tipo).

Si deduce facilmente che  $S_n \equiv F_n$ ,  $n \geq 1$ , dove  $\{F_n\}$  è la successione dei numeri di Fibonacci. Per quanto visto sopra, si ottiene, quindi che:

$$S_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad n \gg 1.$$

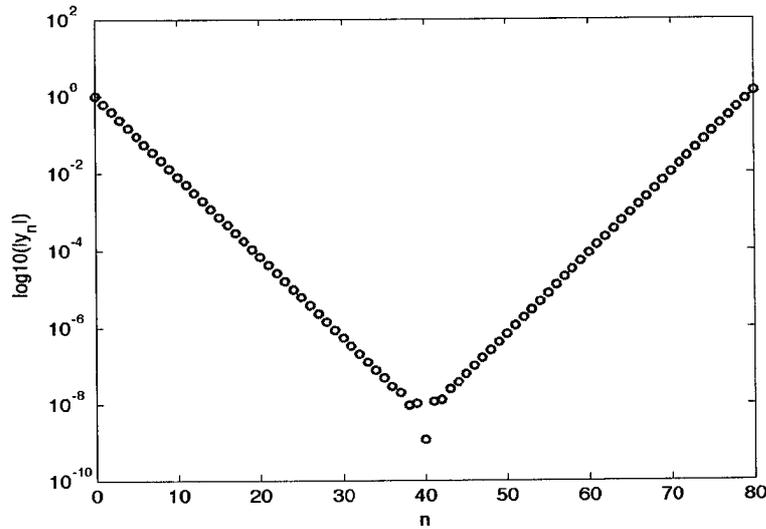


Figura 3.1: Successione in Sezione 3.1.

Claude Shannon, il padre della Teoria dell'Informazione, definisce la *capacità del canale* come

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 S_n}{n} = \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

### Il bit fatale

L'equazione (3.16) fornisce lo spunto per l'analisi del seguente fenomeno che si osserva calcolando la relazione di ricorrenza su un calcolatore. Infatti, dalla (3.17) segue che, utilizzando come condizioni iniziali

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0.6180339887498948 \dots,$$

si dovrebbe ottenere la successione

$$y_n = \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Se tuttavia grafichiamo  $\log_{10} |y_n|$  rispetto ad  $n$ , utilizzando la doppia precisione IEEE, si ottiene il grafico in Figura 3.1, in cui si vede che il comportamento è sostanzialmente corretto fino a  $n = 38$  ma poi la soluzione comincia a crescere come  $|z_1|^n$ . Cerchiamo di comprendere il motivo di questo, che sarà ulteriormente approfondito nel seguito, quando parleremo di *stabilità di una soluzione*. Per il momento, basterà dire che, poiché la seconda condizione iniziale non è rappresentabile esattamente, nella (3.17) invece di avere  $c_1 = 0$  a  $c_2 = 1$ , si avrà, a causa degli errori di rappresentazione,  $c_2 \approx 1$ ,  $|c_1| \approx u \approx 10^{-16}$ , dove  $u$  è la *precisione di macchina*.<sup>1</sup> Pertanto, il comportamento qualitativo della soluzione calcolata comincerà a

<sup>1</sup>In altre parole, avremo un errore sull'ultimo *bit* di rappresentazione della mantissa.

differire da quello atteso non appena

$$u|z_1|^n \approx |z_2|^n,$$

ovvero

$$n \approx \frac{-\log u}{\log |z_1| - \log |z_2|} \approx 38.$$

In conclusione, questa semplice analisi spiega perfettamente il fenomeno osservato numericamente.

### Piano di ammortamento di un mutuo

Si supponga di voler contrarre un mutuo per un capitale  $C$ , da estinguere in  $N$  rate, ad un tasso (normalizzato per il periodo della rata)  $i$ . Vogliamo determinare l'importo della rata, sia esso  $r$ . Se denotiamo con  $y_n$  il debito residuo dopo il pagamento della rata  $n$ -esima, si ottiene:

$$y_n = (1+i)y_{n-1} - r, \quad n = 1, \dots, N, \quad y_0 = C.$$

L'importo della rata  $r$  va dunque calcolato in modo da avere  $y_N = 0$ . L'equazione omogenea è

$$y_n = (1+i)y_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N,$$

la cui soluzione generale è  $y_n = \alpha(1+i)^n$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ricerchiamo, ora, una soluzione particolare dell'equazione completa. La cercheremo costante (cosa possibile in questo caso):

$$\bar{y} = (1+i)\bar{y} - r \quad \implies \quad \bar{y} = \frac{r}{i}.$$

La soluzione generale dell'equazione completa sarà, dunque,

$$y_n = \alpha(1+i)^n + \frac{r}{i}.$$

Imponendo la condizione iniziale  $y_0 = C$ , si ottiene

$$\alpha = \left(C - \frac{r}{i}\right),$$

da cui:

$$y_n = C(1+i)^n + \frac{r}{i}(1 - (1+i)^n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Imponendo che il mutuo sia estinto dopo  $N$  rate (ovvero che  $y_N = 0$ ) si ricava, infine, l'importo della rata:

$$r = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-N}} \equiv \frac{C}{f},$$

dove  $f$  è denominato *fattore di ammortamento*. Noti il capitale preso in prestito, il tasso  $i$ , e l'importo della rata  $r$ , è possibile determinare la *quota interessi* e la *quota capitale* ad ogni rata definendo, in questo modo, il *piano di ammortamento del mutuo*.

### Il modello del *cobweb*

Il presente modello, a tempo discreto, descrive la dinamica del prezzo di mercato di un singolo bene. Il fatto che il tempo sia discreto, invece che continuo, ben si applica alla realtà, dove generalmente la produzione del bene avviene in cicli di produzione. Si pensi ad esempio all'agricoltura, dove la produzione ha spesso cadenze stagionali. Ciò premesso, andiamo a definire i soggetti del modello; denoteremo con:

- $p_n$  il prezzo del bene al tempo  $n$ ;
- $S_n$  l'offerta del bene al tempo  $n$ ;
- $D_n$  la domanda del bene al tempo  $n$ .

Chiaramente, sia la domanda che l'offerta saranno funzioni del prezzo del bene. In particolare:

$$S_n = g(p_{n-1}),$$

con  $g$  funzione crescente. Infatti, se il prezzo al tempo  $n - 1$  aumentasse, la produzione, al tempo successivo, sarebbe incrementata mentre diminuirebbe, se il prezzo si abbassasse. Nel nostro modello, assumeremo  $g$  essere lineare:

$$S_n = bp_{n-1} + s_0,$$

dove  $b, s_0 > 0$ . Allo stesso modo, assumendo ancora un modello lineare per  $D_n$ , si avrà:

$$D_n = -ap_n + d_0,$$

dove  $a, d_0 > 0$ . In questo caso,  $D_n$  è una funzione evidentemente decrescente del prezzo corrente del bene. Inoltre è ragionevole assumere che la domanda a prezzo nullo,  $d_0$ , sia molto maggiore dell'offerta a prezzo nullo,  $s_0$ . Ovvero:

$$d_0 \gg s_0 > 0.$$

La dinamica del prezzo si ottiene imponendo che, ad ogni tempo  $n$ , l'offerta e la domanda si equivalgano:  $D_n = S_n$ , ovvero

$$-ap_n + d_0 = bp_{n-1} + s_0, \quad n \geq 1. \quad (3.18)$$

È interessante notare che esiste un *prezzo di equilibrio*, sia esso  $\bar{p}$  tale che:

$$-a\bar{p} + d_0 = b\bar{p} + s_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = \frac{d_0 - s_0}{a + b} > 0,$$

in quanto, come su evidenziato,  $d_0 > s_0$ . Tale prezzo è altresì una soluzione particolare dell'equazione, la cui soluzione generale sarà data, invece, da:

$$p_n = \bar{p} + \left(-\frac{b}{a}\right)^n (p_0 - \bar{p}), \quad n \geq 0,$$

essendo  $p_0 > 0$  il prezzo iniziale del bene. È chiaro che dovrà essere  $p_n > 0$ , affinché il mercato sia stabile (altrimenti si andrebbe in bancarotta) e, affinché ciò avvenga, è necessario che si abbia

$$\frac{b}{a} < 1,$$

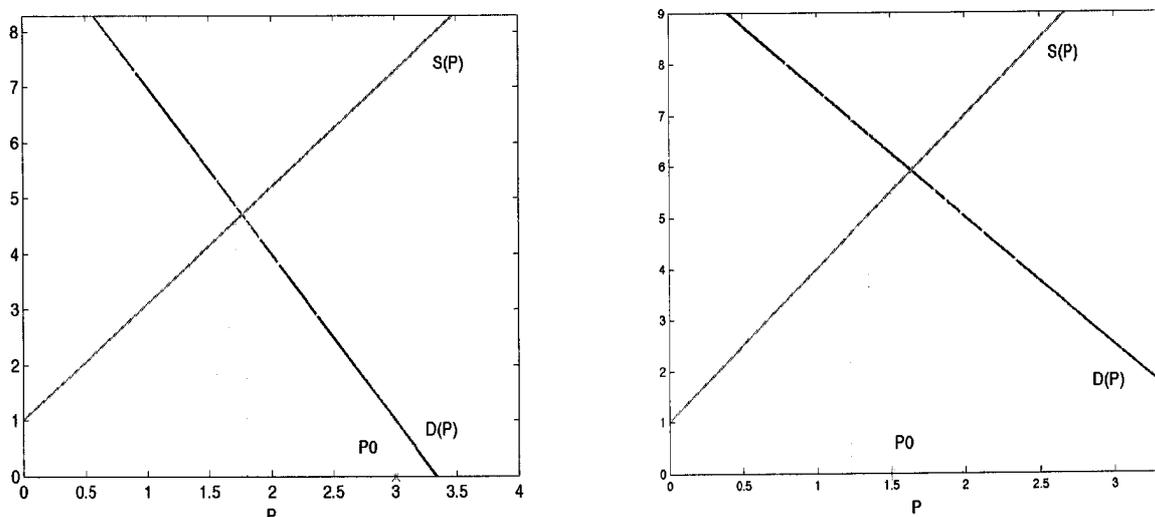


Figura 3.2: Modello del *cobweb*, prezzo di equilibrio stabile (a sinistra) ed instabile (a destra).

ossia  $b < a$ . In tal caso, la successione dei prezzi tenderà al prezzo di equilibrio  $\bar{p}$ , come si vede nel grafico a sinistra in Figura 3.2. Viceversa, se  $b > a$ , il prezzo divergerà, come si può vedere nel grafico a destra in Figura 3.2, e, pertanto, si otterrà il collasso del sistema (ovvero, si otterranno prezzi negativi). In entrambi i casi, le traiettorie descrivono una sorta di ragnatela e, per questo motivo, il modello esposto è denominato *modello del cobweb*.

**Osservazione 3.2** Osserviamo che la condizione che assicura la stabilità del mercato, ovvero  $a > b$ , ha un interessante significato fisico: essa significa che la risposta alla variazione dei prezzi della domanda deve essere più rapida della variazione dei prezzi dell'offerta. Diversamente, si innesca una spirale inflattiva.

### I polinomi di Chebyshev

Si consideri l'equazione, avendo fissato  $x \in \mathbb{R}$ :

$$y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}, \quad n \gg 1. \quad (3.19)$$

Fissando le condizioni iniziali:

$$y_0 = 1 \equiv T_0(x), \quad y_1 = x \equiv T_1(x), \quad (3.20)$$

si ottiene la successione  $\{T_n(x)\}$ , dei *polinomi di Chebyshev di prima specie*. Fissando, invece, le condizioni iniziali:

$$y_0 = 1 \equiv U_0(x), \quad y_1 = 2x \equiv U_1(x), \quad (3.21)$$

si ottiene la successione  $\{U_n(x)\}$ , dei *polinomi di Chebyshev di seconda specie*. Infatti, riguardate come funzioni di  $x$ , si verifica facilmente che  $T_n(x), U_n(x) \in \Pi_n$ ,  $n \geq 0$ . Questi polinomi hanno un ruolo di primaria importanza in Teoria dell'Approssimazione. Ricaviamo la loro espressione esplicita. Il polinomio caratteristico associato alla (3.19) è

$$p(z) = z^2 - 2xz + 1,$$

Le cui radici sono

$$z_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Assumendo, per semplicità, che sia  $x \neq \pm 1$ , si ottiene, quindi:

$$y_n = c_1 \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + c_2 \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n.$$

Imponendo le condizioni iniziali (3.20), si ottiene, quindi:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right], \quad n \geq 0. \quad (3.22)$$

Similmente, imponendo le condizioni iniziali (3.21), si ottiene:

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \left[ \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n+1} - \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0. \quad (3.23)$$

In genere, questi polinomi vengono calcolati con  $x \in (-1, 1)$ , per cui, utilizzando la parametrizzazione

$$x = \cos \theta, \quad \theta \in (0, \pi),$$

si ottiene

$$z_{1/2} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta},$$

da cui si perviene alle espressioni, equivalenti alle (3.22) e (3.23), rispettivamente date da:

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad n \geq 0, \quad \theta \in (0, \pi),$$

e

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n \geq 0, \quad \theta \in (0, \pi).$$

## 3.2 Il caso di radici multiple

Esaminiamo, ora, il caso in cui le radici del polinomio caratteristico (3.14) non siano tutte semplici. In particolare, assumiamo che le radici distinte siano  $z_1, \dots, z_\nu$ , aventi, rispettivamente, molteplicità  $m_1, \dots, m_\nu$ . Chiaramente, si avrà:

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i = k. \quad (3.24)$$

In tal caso, vale il seguente risultato.

**Teorema 3.8** *Sia  $z_s$  radice di molteplicità  $m_s$  di (3.14). Allora*

$$y_n = u_s(n) z_s^n, \quad n \geq n_0, \quad u_s \in \Pi_{m_s-1}, \quad (3.25)$$

*è soluzione dell'equazione omogenea (3.13).*

Dimostrazione. Ricordiamo che, essendo  $z_s$  radice di molteplicità  $m_s$  di  $p(z)$ , si avrà:

$$p(z_s) = p'(z_s) = \dots = p^{(m_s-1)}(z_s) = 0. \quad (3.26)$$

Sostituendo la (3.25) nella (3.13), si ottiene:

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = z^n \sum_{i=0}^k p_i u_s(n+k-i) z^{k-i} = z^n \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} E^{k-i} u_s(n).$$

Utilizzando la (2.2), si ricava

$$E^{k-i} = \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} \Delta^j$$

e, pertanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} E^{k-i} u_s(n) \\ &= \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} \Delta^j u_s(n) = \sum_{j=0}^k \Delta^j u_s(n) \sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-i}{j} p_i z_s^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^k \Delta^j u_s(n) \frac{z_s^j}{j!} \sum_{i=0}^{k-j} (k-i)^{(j)} p_i z_s^{k-i-j} \equiv \sum_{j=0}^k \Delta^j u_s(n) \frac{z_s^j}{j!} p^{(j)}(z_s) \\ &= \sum_{j=0}^{m_s-1} \Delta^j u_s(n) \frac{z_s^j}{j!} \underbrace{p^{(j)}(z_s)}_{=0} + \sum_{j=m_s}^k \Delta^j u_s(n) \frac{z_s^j}{j!} \underbrace{p^{(j)}(z_s)}_{=0}, \end{aligned}$$

in virtù della (3.26) e del Teorema 2.2.  $\square$

Dal questo risultato, discende che

$$\overbrace{z_1^n, n z_1^n, \dots, n^{m_1-1} z_1^n}_{m_1}, \underbrace{z_2^n, n z_2^n, \dots, n^{m_2-1} z_2^n}_{m_2}, \dots, \overbrace{z_\nu^n, n z_\nu^n, \dots, n^{m_\nu-1} z_\nu^n}_{m_\nu}, \quad (3.27)$$

sono (vedi (3.24))  $k$  soluzioni della equazione omogenea (3.13). Inoltre, la corrispondente matrice di Casorati, calcolata in  $n = 0$ , vale:

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 1 \cdot z_1 & \dots & 1^{m_1-1} z_1 & \dots & z_\nu & 1 \cdot z_\nu & \dots & 1^{m_\nu-1} z_\nu \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{k-1} & (k-1) \cdot z_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{m_1-1} z_1^{k-1} & \dots & z_\nu^{k-1} & (k-1) \cdot z_\nu^{k-1} & \dots & (k-1)^{m_\nu-1} z_\nu^{k-1} \end{pmatrix},$$

che si può dimostrare essere nonsingolare, sotto l'ipotesi che  $z_1, \dots, z_\nu$  siano tra loro distinti. Pertanto, si deduce che le  $k$  soluzioni (3.27) sono linearmente indipendenti e risulta dimostrato il seguente risultato.

**Corollario 3.3** *Siano  $z_1, \dots, z_\nu$  le radici distinte di (3.14), aventi molteplicità  $m_1, \dots, m_\nu$ , rispettivamente. Allora la soluzione generale della (3.13) è data da:*

$$y_n = \sum_{i=1}^{\nu} z_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j, \quad n \geq n_0. \quad (3.28)$$

**Osservazione 3.3** Come nel caso della (3.15), le  $k$  costanti  $\{c_{ij}\}$  saranno univocamente determinate dalle condizioni iniziali (3.12).

### 3.3 Stabilità delle soluzioni

Introduciamo ora il concetto, molto importante, di *stabilità di una soluzione*. Esamineremo il caso discreto, come usuale, sebbene analoghi risultati valgano per il caso continuo. Inoltre, esamineremo ora il caso di equazioni lineari: il caso generale sarà trattato successivamente.

Sia dunque  $\{\bar{y}_n\}$  una soluzione di riferimento della equazione (3.11). Data una qualunque altra soluzione della stessa equazione, sia essa  $\{y_n\}$ , definiamo la successione dell'errore:

$$e_n = y_n - \bar{y}_n, \quad n \geq n_0. \quad (3.29)$$

Diremo che la soluzione di riferimento  $\{\bar{y}_n\}$  è:

- **stabile**, se  $\sup_{n \geq n_0} |e_n| < \infty$ ;
- **asintoticamente stabile**, se inoltre  $\lim_{n \rightarrow \infty} |e_n| = 0$ ;
- **instabile**, se non è stabile.

Cerchiamo di caratterizzare le precedenti proprietà. Cominciamo con l'osservare che, essendo  $\{\bar{y}_n\}$  e  $\{y_n\}$  soluzioni dell'equazione non omogenea, la loro differenza,  $\{e_n\}$  sarà soluzione dell'equazione omogenea associata (3.13). Pertanto, dalla (3.28), segue che:

$$e_n = \sum_{i=1}^{\nu} z_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j, \quad n \geq n_0, \quad (3.30)$$

dove  $z_1, \dots, z_\nu$  sono le radici distinte, aventi rispettivamente molteplicità  $m_1, \dots, m_\nu$ , del polinomio caratteristico (3.14). Dalla (3.30) discende facilmente il seguente risultato.

**Teorema 3.9** La soluzione  $\{\bar{y}_n\}$  è:

- *asintoticamente stabile*, se e solo se  $|z_i| < 1$ , per ogni  $i = 1, \dots, \nu$ ;
- *stabile*, se e solo se  $|z_i| \leq 1$ , per ogni  $i = 1, \dots, \nu$ , e, inoltre,

$$|z_i| = 1 \Rightarrow m_i = 1;$$

- *instabile*, se esiste  $i \in \{1, \dots, \nu\}$  per cui  $|z_i| > 1$  oppure  $|z_i| = 1$  e  $m_i > 1$ .

**Definizione 3.1** Un polinomio avente tutte le radici nel cerchio aperto unitario del piano complesso si chiama polinomio di Schur. Se le radici sono nel cerchio chiuso e le radici sulla circonferenza unitaria sono semplici, allora il polinomio è detto polinomio di Von Neumann.

Pertanto, dal Teorema 3.9 segue che  $\{\bar{y}_n\}$  è asintoticamente stabile se e solo se  $p(z)$  è un polinomio di Schur. Sarà, invece *stabile* se e solo se  $p(z)$  è un polinomio di Von Neumann. Diversamente, sarà instabile.

**Esercizio 3.1** *L'equazione alle differenze:*

$$y_{n+2} - 2\alpha y_{n+1} + y_n = 2, \quad n \geq 0,$$

ammette la soluzione costante

$$\bar{y} = (1 - \alpha)^{-1},$$

per ogni  $\alpha \neq 1$ . Le radici del polinomio caratteristico dell'omogenea associata sono:

$$z_{1/2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Per  $\alpha \in (-1, 1)$ , esse sono complesse e coniugate e di modulo 1. Pertanto  $\bar{y}$  è, in questo caso, stabile. Per  $\alpha = -1$  le radici sono coincidenti e di modulo 1: pertanto  $\bar{y}$  sarà instabile. Similmente, per  $\alpha > 1$  si ottiene:  $z_1 > 1 > z_2 > 0$  e, pertanto,  $\bar{y}$  sarà instabile. Alla stessa conclusione si perviene per  $\alpha < -1$ : infatti in questo caso si ha:  $z_2 < -1 < z_1 < 0$ .

### I due criteri di Schur

Esistono dei semplici criteri algebrici che caratterizzano un polinomio di Schur o di Von Neumann. Per la loro dimostrazione è necessario richiamare un importante risultato relativo alle funzioni di una variabile complessa.

**Teorema 3.10 (Rouché)** *Siano  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe<sup>2</sup> in un dominio contenente un contorno chiuso  $\mathcal{C}$ . Se  $|f(z)| > |g(z)|$  per ogni  $z \in \mathcal{C}$ , allora  $f(z)$  e  $(f \pm g)(z)$  hanno lo stesso numero di zeri all'interno di  $\mathcal{C}$ .*

Dato il polinomio  $p(z)$  di grado  $k$  definito in (3.14), definiamo il suo *polinomio aggiunto*<sup>3</sup>

$$q(z) = \sum_{i=0}^k \bar{p}_i z^i \equiv z^k \bar{p}(z^{-1})$$

e, quindi, il *polinomio ridotto*

$$p^{(1)}(z) \equiv \frac{q(0)p(z) - p(0)q(z)}{z} = \frac{\bar{p}_0 p(z) - p_k q(z)}{z} \equiv \sum_{i=0}^{k-1} (\bar{p}_0 p_i - p_k \bar{p}_{k-i}) z^{k-1-i} \in \Pi_{k-1}.$$

Valgono, quindi, i due seguenti risultati.

**Teorema 3.11 (primo criterio di Schur)** *Il polinomio  $p(z)$  è un polinomio di Schur se e solo se  $|p_0| > |p_k|$  e, inoltre,  $p^{(1)}(z)$  è un polinomio di Schur.*

**Teorema 3.12 (secondo criterio di Schur)** *Il polinomio  $p(z)$  è un polinomio di Von Neumann se e solo se:*

i)  $|p_0| > |p_k|$  e, inoltre,  $p^{(1)}(z)$  è un polinomio di Von Neumann;

oppure:

ii)  $p^{(1)}(z) \equiv 0$  e, inoltre,  $p'(z)$  è un polinomio di Schur.

<sup>2</sup>Ossia, derivabili.

<sup>3</sup>Come usuale,  $\bar{p}_i$  denoterà il complesso e coniugato di  $p_i$ .

Dimostriamo il primo criterio di Schur: la dimostrazione del secondo criterio si ottiene in modo analogo, sebbene essa sia più articolata.

**Dimostrazione.** (Primo criterio di Schur) Supponiamo che sia  $p(z)$  un polinomio di Schur e siano  $z_1, \dots, z_k$  le sue radici (non necessariamente tutte distinte tra loro). Pertanto si avrà:

$$\prod_{i=1}^k |z_i| = \frac{|p_k|}{|p_0|} < 1,$$

da cui segue la prima condizione  $|p_k| < |p_0|$ . Inoltre, per  $|z| = 1$ , si ottiene:

$$|q(z)| = |z^k| |\bar{p}(z^{-1})| = |\bar{p}(\bar{z})| = |p(z)|. \quad (3.31)$$

Pertanto, avendosi  $|p_0| > |p_k|$ , segue che

$$|\bar{p}_0 p(z)| > |p_k q(z)|, \quad \forall |z| = 1.$$

Dal Teorema di Rouché segue quindi che  $p(z)$  e  $zp^{(1)}(z) \equiv \bar{p}_0 p(z) - p_k q(z)$  hanno lo stesso numero di zeri nel cerchio aperto unitario  $|z| < 1$ . Poichè  $p(z)$  ne ha  $k$  e, d'altra parte,  $z = 0$  è radice di  $zp^{(1)}(z)$ , segue che  $p^{(1)}(z)$  (che ha grado  $k-1$ ) ha tutte le radici di modulo minore di 1, ovvero è un polinomio di Schur. Questo dimostra la prima implicazione.

Supponiamo ora che sia  $|p_0| > |p_k|$  e  $q(z)$  sia un polinomio di Schur. Pertanto, sulla circonferenza unitaria  $|z| = 1$  si avrà, in virtù della (3.31),  $|\bar{p}_0 p(z)| > |p_k q(z)|$ . Sempre dal Teorema di Rouché segue, pertanto, che  $zp^{(1)}(z)$  e  $\bar{p}_0 p(z)$  hanno lo stesso numero di radici nel cerchio aperto unitario. Poichè  $zp^{(1)}(z)$  ne ha  $k$ , altrettante ne avrà  $p(z)$  che, pertanto, sarà un polinomio di Schur.  $\square$

Nel seguito, esaminiamo delle semplici applicazioni dei criteri di Schur.

### Il modello del *cobweb* esteso

Nel modello del *cobweb* si otteneva la dinamica dei prezzi di un singolo bene uguagliando, ad ogni tempo  $n$ , la domanda  $D_n$  e l'offerta  $S_n$ , che erano date da

$$D_n = -ap_n + d_0, \quad S_n = bp_{n-1} + s_0, \quad n \geq 1,$$

essendo  $p_n$  il prezzo al tempo  $n$  e  $a, b, d_0, s_0 > 0$ , con  $d_0 > s_0$ . Questo modello si può generalizzare, raffinando la espressione dell'offerta al tempo  $n$  che, invece di basarsi sul prezzo al tempo  $n-1$  ( $p_{n-1}$ ), potrebbe, invece, basarsi sul *prezzo previsto* al tempo  $n$ , che si può stimare come:

$$p_n^{(\text{previsto})} = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

In altri termini, al prezzo al tempo  $n-1$ , si aggiunge un termine che tiene conto del *trend* dei prezzi: se  $\rho > 0$  la tendenza dei prezzi è conservata mentre, nel caso  $\rho < 0$ , si ha una inversione di tendenza. Sostituendo il prezzo previsto al tempo  $n$  nella espressione dell'offerta si ottiene, quindi,

$$S_n = b[p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2})] + s_0.$$

Eguagliando alla domanda  $D_n$ , si ottiene, quindi, il modello del *cobweb esteso*:

$$-ap_n + d_0 = b[p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2})] + s_0, \quad n \geq 2.$$

Riordinando i termini, si ottiene, pertanto, una equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti del secondo ordine:

$$ap_n + b(1 + \rho)p_{n-1} - \rho bp_{n-2} = d_0 - s_0, \quad n \geq 2.$$

Osserviamo che, nel caso  $\rho = 0$ , si otterrebbe il modello originario (3.18): Esiste ancora un prezzo di equilibrio, che ha la stessa espressione vista per il modello del *cobweb* originario:

$$\bar{p} = \frac{d_0 - s_0}{a + b},$$

che risulta essere positivo (e quindi ammissibile) sotto l'ipotesi fatta che sia (come è ovvio che sia)  $d_0 > s_0$ . Affinchè il prezzo di equilibrio sia asintoticamente stabile, il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata,

$$p(z) = az^2 + b(1 + \rho)z - \rho b, \quad (3.32)$$

dovrà essere un polinomio di Schur. Pertanto, dovrà essere

$$|\rho| \frac{b}{a} < 1, \quad (3.33)$$

e, inoltre, essendo il polinomio ridotto dato da

$$p^{(1)}(z) = (a^2 - \rho^2 b^2)z + b(1 + \rho)(a + \rho b),$$

dovrà essere, tenendo conto della (3.33),

$$|z| = \frac{b}{a} \cdot \frac{|1 + \rho|}{1 - \rho \frac{b}{a}} < 1. \quad (3.34)$$

Osserviamo che nel caso in cui  $\rho = 0$ , allora (3.33) è sempre soddisfatta, mentre (3.34) si riduce alla condizione  $a > b$  vista per il modello del *cobweb* originario. Diversamente, si ottiene una condizione sul parametro  $\rho$ :

$$\rho < \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} - 1 \right),$$

che deve essere soddisfatta assieme alla (3.33).

### Modello di economia di una nazione

Questo modello, a tempo discreto, descrive la dinamica del prodotto lordo di una nazione. Siano dunque:

- $Y_n$  - il prodotto interno lordo (PIL) al tempo  $n$ ;
- $I_n$  - gli investimenti dei privati al tempo  $n$ ;
- $C_n$  - i consumi al tempo  $n$ ;
- $G_n$  - le spese di governo al tempo  $n$ .

È chiaro che questo modello non tiene in conto di fenomeni più complessi dovuti, ad esempio, alla globalizzazione, ecc. Nondimeno, permette di analizzare le interazioni dei vari attori. In particolare, si avrà:

$$Y_n = I_n + C_n + G_n, \quad (3.35)$$

Inoltre, è ragionevole supporre che:

$$C_n = \alpha Y_{n-1}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

ovvero i consumi al tempo  $n$  sono una frazione della ricchezza al tempo  $n - 1$ . Similmente, gli investimenti al tempo  $n$  saranno proporzionali all'incremento dei consumi:

$$I_n = \rho(C_n - C_{n-1}), \quad \rho > 0.$$

Assumendo, per semplicità che le spese di governo siano costanti ed uguali a  $G > 0$ <sup>4</sup> si ottiene, quindi, sostituendo queste espressioni nella (3.35):

$$Y_n = \alpha\rho(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + \alpha Y_{n-1} + G, \quad n \geq 2,$$

ovvero

$$Y_n - \alpha(1 + \rho)Y_{n-1} + \alpha\rho Y_{n-2} = G, \quad n \geq 2.$$

Esiste, in questo caso, una ricchezza di equilibrio:

$$\bar{Y} = \frac{G}{1 - \alpha}, \quad (3.36)$$

che è fisicamente plausibile, sotto l'ipotesi fatta che  $0 < \alpha < 1$ . Questo punto di equilibrio sarà asintoticamente stabile, ovvero

$$Y_n \rightarrow \bar{Y}, \quad n \rightarrow \infty,$$

se il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea,

$$p(z) = z^2 - \alpha(1 + \rho)z + \alpha\rho$$

è un polinomio di Schur. Applicando il primo criterio di Schur, si ottiene, quindi (ricordando le assunzioni  $\rho > 0$  e  $0 < \alpha < 1$  precedentemente fatte):

- $\alpha\rho < 1$ ;
- $(1 + \alpha\rho)z - \alpha(1 + \rho)$  polinomio di Schur.

Ovvero,

$$\rho < \alpha^{-1}.$$

Pertanto, la ricchezza è asintoticamente stabile sotto l'ipotesi che il coefficiente  $\rho$  non sia troppo grande (il che è anche intuibile). Il coefficiente  $(1 - \alpha)^{-1}$  che moltiplica  $G$  per ottenere la ricchezza di equilibrio in (3.36) è detto *moltiplicatore*. Questo dice che, aumentando le spese di governo, la ricchezza aumenta. Se, tuttavia, viene meno l'asintotica stabilirà di  $\bar{Y}$ , allora si ha la bancarotta. Alla stessa conclusione si perviene se l'ipotesi  $\alpha < 1$  viene meno: in altri termini, incrementare in modo non corretto i consumi porta ugualmente al dissesto.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Purtroppo quest'ultima assunzione è spesso non realistica.

<sup>5</sup>Questo avviene, ad esempio, creando o alimentando il *debito pubblico* di un paese e/o incentivando meccanismi di debito per i cittadini.

### 3.4 Appendice: il caso continuo

In questa sezione esponiamo, per completezza, i risultati relativi alle equazioni differenziali lineari, che presentano una stretta analogia con il caso discreto su esaminato. Per brevità, ci limiteremo al caso di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine  $k$ :

$$\sum_{i=0}^k p_i y^{(k-i)}(t) = g(t), \quad t \geq t_0, \quad (3.37)$$

essendo  $p_0 = 1$ ,  $p_k \neq 0$ , e  $g(t)$  funzione nota (che supporremo almeno continua). Come usuale,  $y^{(j)}(t)$  denota la derivata  $j$ -esima di  $y(t)$ , con la convenzione che  $y^{(0)}(t) = y(t)$ . La soluzione di questa equazione si dimostra esistere ed essere unica, una volta fissate le  $k$  condizioni iniziali

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(k-1)}(t_0). \quad (3.38)$$

All'equazione completa, si associa l'omogenea associata,

$$\sum_{i=0}^k p_i y^{(k-i)}(t) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (3.39)$$

poiché la differenza tra due soluzioni della (3.37) soddisfa, come nel caso discreto, quest'ultima equazione. Ricerchiamo, ora, una soluzione della (3.39) nella forma

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sostituendo nella (3.39), si ottiene:

$$e^{\lambda t} \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Ovvero,  $\lambda$  deve essere radice del *polinomio caratteristico* associato alla (3.39):

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i}. \quad (3.40)$$

Siano ora  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$  le radici distinte di  $p(\lambda)$  aventi, rispettivamente, molteplicità  $m_1, \dots, m_\nu$ , (la cui somma è evidentemente uguale a  $k$ ). In tal caso, si vede che la soluzione generale della (3.39) è data da:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\nu} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} t^j, \quad t \geq t_0.$$

Pertanto, se  $\bar{y}(t)$  è una qualunque soluzione particolare della equazione completa (3.37), allora la soluzione generale di quest'ultima equazione sarà data da:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \sum_{i=1}^{\nu} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} t^j, \quad t \geq t_0.$$

Al solito, le  $k$  costanti  $\{c_{ij}\}$  saranno univocamente determinate dalle condizioni iniziali (3.38).

Detto questo, le definizioni di *stabilità*, *asintotica stabilità*, ed *instabilità* di una soluzione, si danno in modo del tutto analogo a quello visto nel caso discreto. Inoltre, utilizzando argomenti analoghi a quelli precedentemente utilizzati per questo caso, si dimostra il seguente risultato.

**Teorema 3.13** *Una soluzione particolare della (3.37) sarà:*

- *asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio (3.40) hanno parte reale negativa;*
- *stabile se e solo se tutte le radici del polinomio (3.40) hanno parte reale non positiva, essendo semplici quelle con parte reale nulla;*
- *instabile in ogni altro caso.*

**Osservazione 3.4** *Da quanto su esposto, è chiaro che il ruolo del cerchio unitario nel discreto è svolto, nel caso continuo, dal semipiano a parte reale negativa. Similmente, il ruolo della circonferenza unitaria è svolto dall'asse immaginario.*