

Dispense del Corso di

MODELLI NUMERICI per la SIMULAZIONE

Prof. Luigi Brugnano

Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini"

Università di Firenze

<http://www.math.unifi.it/~brugnano/>

a.a. 2013/14

Indice

1	Sistemi dinamici	7
2	Equazioni alle differenze	9
2.1	Gli operatori Δ, E, I	9
2.2	Equazioni alle differenze del primo ordine	11
2.3	Potenze fattoriali	12
2.4	I numeri di Stirling	13
2.5	Ancora sulle equazioni alle differenze del primo ordine	16
2.6	Teoremi del confronto	17
3	Equazioni alle differenze lineari	21
3.1	Equazioni lineari a coefficienti costanti	25
3.2	Il caso di radici multiple	33
3.3	Stabilità delle soluzioni	35
3.4	Appendice: il caso continuo	40
4	Metodi lineari multistep	43
4.1	Ordine di un metodo LMF	44
4.2	Convergenza	46
4.3	Alcuni esempi di metodi LMF convergenti	47
4.4	Stabilità per h fissato	49
4.5	Il <i>boundary locus</i> di un metodo LMF	51
4.6	L-stabilità	52
5	Funzioni di matrici	55
5.1	Proprietà delle matrici componenti	59
5.2	Successioni di funzioni di matrici	63
5.3	Forma canonica di Jordan	67
6	Sistemi lineari di equazioni	71
6.1	Il caso continuo	71
6.2	Il caso discreto	74
6.3	Sistemi dinamici nel piano delle fasi	75
6.4	Risoluzione numerica di equazioni differenziali	79
6.5	Stabilità, condizionamento e <i>stiffness</i>	82
6.6	Sistemi dinamici positivi	85
6.6.1	Sistemi dinamici positivi discreti	88

6.6.2	Sistemi dinamici positivi continui	94
7	Sistemi nonlineari di equazioni	97
7.1	Il caso discreto	97
7.2	Il caso continuo	103
7.3	Funzioni di Lyapunov	110
7.4	Un'applicazione: le equazioni di van der Pol	112
7.5	Ancora sul concetto di <i>stiffness</i>	116
8	Dai punti di equilibrio agli strani attrattori	121
8.1	Modello preda-predatore	121
8.2	Le equazioni di Lorenz	125
8.2.1	Punti di equilibrio	126
8.2.2	Insieme invariante e strano attrattore	126
8.2.3	Finestre di raddoppio del periodo e transizione al caos	130
8.3	L'equazione logistica	130
8.3.1	Il caso continuo	133
8.3.2	Il caso discreto	133
9	Metodi Runge-Kutta	139
9.1	Derivazione di un metodo Runge-Kutta	139
9.1.1	Ordine di un metodo Runge-Kutta	140
9.1.2	Analisi di stabilità lineare per un metodo Runge-Kutta	141
9.2	Sviluppo di Fourier locale	142
9.2.1	Ordine del metodo	145
9.2.2	Costo computazionale	146
9.2.3	Analisi di stabilità lineare	148
9.3	Problemi Hamiltoniani	149
10	Cenni sulla risoluzione di equazioni alle derivate parziali	157
10.1	Famiglie di matrici ed operatori di Toeplitz a banda	157
10.2	L'equazione del calore	161
10.2.1	Complessità computazionale del metodo di Crank-Nicolson	162
10.3	L'equazione delle onde	165
10.4	Equazione di trasporto e diffusione	168
10.5	Equazioni ellittiche e problemi ai valori ai limiti	171

Prefazione

Da Newton in poi, il concetto di sistema dinamico ha assunto un significato preminente in ambito modellistico-matematico. Spesso i sistemi dinamici sono descritti da equazioni differenziali e, pertanto, a tempo continuo. Tuttavia, l'introduzione del calcolatore, come strumento al servizio del matematico applicato, ha reso necessaria la loro risoluzione, approssimata, mediante opportuni metodi numerici.

Dal punto di vista concettuale, questo significa sostituire il sistema dinamico continuo originario con una controparte discreta, indotta dal metodo numerico di approssimazione. Chiaramente, affinché la cosa sia sensata, è necessario che i due sistemi dinamici siano tra loro "imparentati". Questo significa, ad esempio, che il sistema dinamico discreto, indotto dal metodo numerico, deve preservare le strutture critiche di quello continuo e la geometria delle soluzioni in un loro intorno.

Pertanto, le questioni di stabilità, lineare e nonlineare, assumeranno un ruolo predominante nella trattazione, sia nel caso continuo che discreto. Saranno introdotte e studiate le equazioni alle differenze, lineari e nonlineari, che saranno utilizzate, insieme alle controparti continue, per illustrare alcuni modelli matematici, sia a tempo continuo che discreto, descrittivi di fenomeni reali.

Il corso riguarderà altresì la trattazione dei metodi numerici di base per equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

Capitolo 1

Sistemi dinamici

Molti fenomeni studiati nelle applicazioni sono di tipo *evolutivo*, ovvero sono descritti da un processo dinamico che evolve nel tempo.

Questo tipo di fenomeni sono spesso modellizzati matematicamente mediante un *problema ai valori iniziali* per equazioni *differenziali*, se il tempo assume valori continui, o alle *differenze*, se il tempo assume valori discreti.

Senza perdere in generalità, possiamo formalizzare questi due tipi di problemi, rispettivamente, come:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{assegnato}, \quad (1.2)$$

e

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{assegnato}. \quad (1.4)$$

Per semplicità espositiva, supporremo che la soluzione sia definita per ogni scelta della *condizione iniziale* $y_0 \in \mathbb{R}^m$ (nel caso generale potrebbe essere ristretta ad un opportuno dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$), e per ogni $t \geq 0$ o $n \geq 0$ (diversamente, potrebbe aversi $t \in [0, T]$ e $n \in \{0, \dots, N\}$, rispettivamente).

La soluzione $y(t)$ del problema (1.1)-(1.2) descrive una *traiettoria continua*, soluzione del problema stesso. Similmente, la soluzione $\{y_n\}$ del problema (1.3)-(1.4) descrive una *traiettoria discreta*.

Associata alla equazione (1.1) è la *mappa continua* (denominata anche *flusso*)

$$\phi_t(y_0) = y(t), \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

che genera la soluzione di (1.1)-(1.2). Essa definisce il *sistema dinamico (continuo)* associato alla equazione (1.1). Similmente, associata alla equazione (1.3) è la *mappa discreta*

$$\phi_n(y_0) = y_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

che genera la soluzione di (1.3)-(1.4). Essa definisce il *sistema dinamico (discreto)* associato alla equazione (1.3).

Come nei corsi di base di Analisi Numerica si era interessati allo studio del condizionamento di un problema, ovvero, di quanto variasse la sua soluzione al variare dei dati di ingresso,

in questa sede siamo interessati a studiare il comportamento delle *traiettorie soluzione*, al variare della condizione iniziale y_0 . Questo studio è infatti essenziale, al fine di ottenere una corretta simulazione dei fenomeni. In particolare, di grande importanza, nello studio dei sistemi dinamici, sono i suoi *insiemi (o strutture) di equilibrio* (o *insiemi critici*). Diremo che $P \subset \mathbb{R}^m$ è un *insieme (o struttura) di equilibrio* se

$$\phi_t(P) \equiv P, \quad \forall t \geq 0,$$

nel caso continuo, ovvero

$$\phi_n(P) \equiv P, \quad n = 0, 1, \dots,$$

nel caso discreto, dove la mappa applicata all'insieme P equivale alla sua applicazione ad ogni punto dell'insieme stesso.

Gli insiemi di equilibrio di un sistema dinamico sono molto importanti, specie nella simulazione dei fenomeni, perché se la dinamica è confinata ad essi, allora essa è (relativamente) facilmente prevedibile semplificando, in questo modo, il processo di inferenza sul fenomeno sottostante.

Tuttavia, questi insiemi di equilibrio hanno una rilevanza fisica se piccole perturbazioni della dinamica permettono di rimanere in un loro opportuno intorno, ovvero di ritornarci (almeno asintoticamente). Siamo, cioè, interessati alle *proprietà di stabilità* delle strutture di equilibrio di un sistema dinamico. Queste proprietà di stabilità dovranno, nel caso di modelli continui, essere preservate dai sistemi dinamici discreti indotti dai corrispondenti *metodi numerici di approssimazione*.

Per questo motivo, durante il corso si daranno esempi di sistemi dinamici continui e discreti, nonché della corrispondenza qualitativa (prima che quantitativa) tra i sistemi dinamici discreti ottenuti dalla applicazione dei metodi numerici per approssimare opportuni sistemi dinamici continui: questi ultimi descritti da *equazioni differenziali*, mentre i primi descritti da corrispondenti *equazioni alle differenze*.

Cominceremo con l'analisi di casi semplici di equazioni alle differenze, per poi passare ad esaminare il caso di equazioni differenziali, e/o alle differenze, più complesse.

Capitolo 2

Equazioni alle differenze: considerazioni preliminari

Per introdurre le equazioni alle differenze, è necessario definire funzioni *discrete*, ovvero funzioni definite su un dominio discreto,

$$\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, \quad \text{con } x_n \in \mathbb{R} \text{ e } x_n < x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sia, dunque, $f : \Omega \rightarrow V$, con V uno spazio vettoriale (spesso, ma non sempre, si tratterà di \mathbb{R} o \mathbb{R}^m , ovvero di \mathbb{C} o \mathbb{C}^m). Useremo, ove opportuno, la notazione

$$f_n \equiv f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esercizio 2.1 *Alcuni esempi di domini:*

- $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, ovvero, $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, \dots$;
- se $h > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, $\Omega = \{x, x + h, x + 2h, \dots\}$, ovvero $x_i = x + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$

2.1 Gli operatori Δ, E, I

Definiamo, ora, gli operatori:

- *shift* E : $Ef_n = f_{n+1}$;
- *identità* I : $If_n = f_n$;
- *differenza (in avanti)* Δ : $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$.

Valgono le seguenti proprietà (la dimostrazione di quelle più ovvie è omessa per brevità):

P1: gli operatori Δ, E, I sono lineari.

Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sono le successioni definite da due funzioni e α, β sono scalari, allora, ad esempio,

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha f_n + \beta g_n) &= (\alpha f_{n+1} + \beta g_{n+1}) - (\alpha f_n + \beta g_n) \\ &= \alpha(f_{n+1} - f_n) + \beta(g_{n+1} - g_n) = \alpha\Delta f_n + \beta\Delta g_n. \end{aligned}$$

Similmente per gli altri operatori;

P2: $\Delta = E - I$, $E = \Delta + I$;

P3: commutatività degli operatori Δ, E, I ;

P4: potenze degli operatori Δ, E, I .

Posto $E^0 = \Delta^0 = I$, si ha:

$$\Delta^k = \Delta \cdot \Delta^{k-1}, \quad E^k = E \cdot E^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

In particolare, si dimostra facilmente per induzione che

$$E^k f_n = f_{n+k}, \quad I^k = I, \quad k \geq 0,$$

mentre, a titolo di esempio, si ha

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta(f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n.$$

Più in generale, sfruttando le proprietà **P2** e **P3**, si ha:

$$\Delta^k f_n = (E - I)^k f_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E^i (-I)^{k-i} f_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f_{n+i}.$$

Ovvero:

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i. \quad (2.1)$$

Similmente, si ottiene:

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i. \quad (2.2)$$

Osserviamo che l'operatore Δ assume, nel discreto, un ruolo simile a quello dell'operatore derivata nel continuo. Questa analogia è avvalorata dai seguenti esempi.

Esercizio 2.2 Siano $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con $h > 0$ parametro fissato. Allora, dimostrare che:

- $f \in C^{(2)}[x_n, x_{n+1}] \Rightarrow \frac{\Delta f_n}{h} = f'(x_n) + O(h)$;
- $f \in C^{(4)}[x_n, x_{n+2}] \Rightarrow \frac{\Delta^2 f_n}{h^2} = f''(x_{n+1}) + O(h^2)$.

Esercizio 2.3 Siano $\{z_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni, allora:

$$\begin{aligned} \Delta(z_n y_n) &= z_{n+1} \Delta y_n + (\Delta z_n) y_n \\ &= (\Delta z_n) y_{n+1} + z_n \Delta y_n \\ &= z_n \Delta y_n + (\Delta z_n) y_n + (\Delta z_n) (\Delta y_n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Inoltre, se $z_n \neq 0$, per ogni n , allora:

$$\Delta \frac{y_n}{z_n} = \frac{z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n}{z_n z_{n+1}}.$$

Osserviamo che, assegnata $\{y_n\}$, si ha:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = y_N - y_{n_0} \equiv y_n \Big|_{n=n_0}^N. \quad (2.4)$$

In questo senso, se assimiliamo l'operatore Δ all'operatore derivata nel continuo, dalla (2.4) segue che l'operatore di *sommatoria definita* è assimilabile all'operatore di integrazione definita. Osserviamo che la (2.4) può essere riscritta anche come:

$$y_N = y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n, \quad (2.5)$$

che risulta formalmente simile al teorema fondamentale del calcolo. Analogamente all'operatore continuo, dalla (2.3) segue la seguente *formula di sommazione per parti*:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} y_n \Delta z_n = (y_n z_n) \Big|_{n=n_0}^N - \sum_{n=n_0}^{N-1} z_{n+1} \Delta y_n.$$

2.2 Equazioni alle differenze del primo ordine

Consideriamo, ora, l'*equazione alle differenze*

$$\Delta y_n = g_n, \quad n \geq n_0, \quad (2.6)$$

in cui supponiamo che la successione $\{g_n\}$ sia nota. L'equazione è detta *del primo ordine*, in quanto può essere riscritta come

$$y_{n+1} = y_n + g_n, \quad n \geq n_0. \quad (2.7)$$

Allora, formalmente, la sua soluzione verrà denotata con

$$y_n = \Delta^{-1} g_n, \quad (2.8)$$

in cui Δ^{-1} è l'operatore *antidifferenza*. Sostituendo la (2.8) nella (2.6), si ottiene che

$$\Delta(\Delta^{-1} g_n) = g_n,$$

da cui si conclude che, formalmente,

$$\Delta \Delta^{-1} = I. \quad (2.9)$$

Osserviamo tuttavia che tale soluzione non è unica, in quanto, se $\{w_n\}$ è una successione costante (data da una qualunque funzione che assuma valori costanti in Ω), allora, risulta $\Delta w_n = 0$ e, pertanto,

$$y_n = \Delta^{-1} g_n + w_n, \quad (2.10)$$

è ancora soluzione della (2.6). Pertanto,

$$\Delta^{-1} g_n = y_n - w_n.$$

Sostituendo, in virtù della (2.6) $g_n = \Delta y_n$, si ottiene, quindi,

$$\Delta^{-1}(\Delta y_n) = y_n - w_n, \quad (2.11)$$

da cui si deduce, utilizzando un abuso di notazione, che

$$\Delta^{-1}\Delta = I - w_n,$$

stando ciò a significare che il primo membro consiste nell'applicare l'operatore I sottraendo una qualunque successione costante al risultato ottenuto. Da quanto appena esposto, segue che dall'equazione

$$\Delta y_n = \Delta z_n, \quad n \geq n_0,$$

segue che, in virtù della (2.11), che

$$y_n = z_n + w_n, \quad n \geq n_0,$$

essendo, al solito, $\{w_n\}$ una successione costante.

Evidentemente, la (successione) costante nella (2.10) viene univocamente determinata nel momento in cui alla equazione (2.6) è associata una *condizione iniziale* y_{n_0} . In tal caso, infatti, la successione soluzione $\{y_n\}$ è univocamente determinata, in virtù della formulazione equivalente (2.7), avendo fissato il valore iniziale y_{n_0} .

Osserviamo che, in virtù della (2.5), dalle (2.6) e (2.8) segue che, in analogia con il caso continuo,

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} g_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = y_N - y_{n_0} = \Delta^{-1} g_n \Big|_{n=n_0}^N. \quad (2.12)$$

Pertanto, conoscere l'antidifferenza di una funzione discreta, consente di calcolarne facilmente le somme tra due qualunque indici assegnati. Questo risultato costituisce l'analogo discreto del caso in cui, nel continuo, è facile calcolare l'integrale definito di una funzione di cui sia nota la primitiva.

2.3 Potenze fattoriali

Abbiamo visto che gli operatori differenza ed antidifferenza svolgono un ruolo analogo agli operatori di derivazione ed integrazione nel continuo. Nel continuo è facile calcolare la derivata e l'integrale della funzione potenza n -esima (con $n \geq 1$):

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cost}, \quad n \geq 1.$$

Inoltre,

$$x^0 = 1, \quad \forall x, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{se } x \neq 0.$$

Nel discreto, questo ruolo è assunto dalla *pseudopotenza*, o *potenza fattoriale*, di x :

$$x^{(n)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}_n. \quad (2.13)$$

Quindi, ad esempio,

$$10^{(4)} = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 5040,$$

che, osserviamo, differisce alquanto da 10^4 . Definendo la funzione discreta $g_k = (x+k)^{(n)}$, essendo $x \in \mathbb{R}$ assegnato (ovvero, assumendo $\Omega = \{x, x+1, x+2, \dots\}$), si verifica facilmente che

$$\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} = nx^{(n-1)},$$

da cui si deduce, in sempre analogia con il caso continuo, che

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} - w(x),$$

essendo $w(x)$ una funzione periodica di periodo 1. Inoltre, dalla relazione:

$$\begin{aligned} x^{(m+n)} &= x(x-1)\cdots(x-m+1)\cdot(x-m)\cdots(x-m-n+1) \\ &= x^{(m)}(x-m)^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ponendo, nella (2.14) $m=0$, si ottiene:

$$x^{(n)} = x^{(0)}x^{(n)},$$

da cui si ricava, in analogia con il caso continuo, che

$$x^{(0)} = 1. \quad (2.15)$$

Similmente, ponendo nella (2.14) $m=-n$, si ottiene

$$x^{(0)} = x^{(-n)}(x+n)^{(n)}$$

da cui, se $(x+n)^{(n)} \neq 0$, si ricava, tenendo conto delle (2.13) e (2.15):

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \quad (2.16)$$

Vediamo alcune semplici proprietà delle potenze fattoriali:

- se $x \in \mathbb{R}$, allora $x^{(n)}$ è un polinomio monico di grado n in x ;
- se k è un intero naturale, $k^{(n)} = 0$, se $n > k$;
- se k è un intero, $k^{(k)} = k^{(k-1)} = k!$;
- se n, k sono interi, $n \geq k$,

$$\frac{n^{(k)}}{k^{(k)}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

2.4 I numeri di Stirling

È possibile stabilire precisamente la relazione algebrica tra potenze e pseudopotenze. In particolare, questa è definita da:

$$x^n = \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i)}, \quad n \geq 1, \quad (2.17)$$

dove i coefficienti $\{S_i^n\}$ sono i *numeri di Stirling di seconda specie* (si veda la Tabella 2.1). Vale il seguente risultato.

Tabella 2.1: Numeri di Stirling di seconda specie (vedi (2.17)).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
⋮	⋮					⋱

Teorema 2.1 Per ogni $n \geq 1$, numeri di Stirling (di seconda specie) sono definiti in modo ricorrente come segue:

$$S_1^n = S_n^n = 1,$$

e, inoltre,

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n + iS_i^n, \quad i = 2, \dots, n.$$

Dimostrazione. Per $n = 1$ si ottiene $S_1^1 = 1$, e questo è vero, avendosi $x^{(1)} = x$. Assunto vera la tesi per n , si ottiene, per $n + 1$:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x \cdot x^n = x \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n S_i^n (x - i + i)x^{(i)} = \sum_{i=1}^n S_i^n [(x - i)x^{(i)} + ix^{(i)}] \\ &= \sum_{i=1}^n S_i^n [x^{(i+1)} + ix^{(i)}] = S_1^n x^{(1)} + \sum_{i=2}^n (S_{i-1}^n + iS_i^n)x^{(i)} + S_n^n x^{(n)} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n+1} S_i^{n+1} x^{(i)}, \end{aligned}$$

da cui la tesi segue facilmente. \square

Osserviamo che, definendo la matrice triangolare inferiore (a diagonale unitaria)

$$T_n = \begin{pmatrix} S_1^1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ S_1^n & \dots & S_n^n \end{pmatrix}$$

ed i vettori

$$\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix},$$

vale, in virtù della (2.17)

$$\mathbf{x}^n = T_n \mathbf{x}^{(n)}.$$

Da questo si ricava che

$$\mathbf{x}^{(n)} = T_n^{-1} \mathbf{x}^n.$$

Tabella 2.2: Numeri di Stirling di prima specie (vedi (2.18)).

$n \setminus i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
\vdots	\vdots					\ddots

Denotando con s_j^i , $i, j = 1, \dots, n$, l'elemento (i, j) della matrice triangolare inferiore T_n^{-1} , si ricava l'espressione delle potenze fattoriali in funzione delle potenze:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n s_i^n x^i, \quad n \geq 1. \quad (2.18)$$

Alcuni dei coefficienti $\{s_i^n\}$, denominati *numeri di Stirling di prima specie*, sono riportati in Tabella 2.2.

La relazione (2.17) che lega potenze e pseudopotenze, permette di derivare facilmente alcune interessanti proprietà.

Teorema 2.2 *Se $p(x) \in \Pi_n$, allora $\Delta^j p(x) \in \Pi_{\max(0, n-j)}$.*

Dimostrazione. Infatti, basta osservare che, in generale,

$$\begin{aligned} \Delta^j x^k &= \Delta^j \left[\sum_{i=1}^k S_i^k x^{(i)} \right] = \sum_{i=1}^k S_i^k \Delta^j x^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^k S_i^{k-i} x^{(i-j)} \in \Pi_{\max(0, k-j)}. \end{aligned}$$

□

In particolare, vale il seguente risultato.

Corollario 2.1 *Se $p(x) \equiv \text{cost}$, allora $\Delta p(x) = 0$.*

Vediamo qualche applicazione delle potenze fattoriali:

1. $\Delta \binom{x}{j} = \binom{x}{j-1}$. Infatti:

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{j} &\equiv \binom{x+1}{j} - \binom{x}{j} = \frac{\Delta x^{(j)}}{j!} \\ &= \frac{j x^{(j-1)}}{j!} = \frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!} = \binom{x}{j-1}. \end{aligned}$$

2. Dalla precedente proprietà, discende immediatamente che:

$$\Delta^{-1} \binom{x}{j} = \binom{x}{j+1} + w(x),$$

dove $w(x)$ è periodica di periodo 1.

3. $\sum_{x=k}^n \binom{x}{j} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}$. Infatti:

$$\sum_{x=k}^n \binom{x}{j} = \Delta^{-1} \binom{x}{j} \Big|_{x=k}^{n+1} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}.$$

Esercizio 2.4 Calcolare, utilizzando le potenze fattoriali,

$$\sum_{i=1}^n i^k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

2.5 Ancora sulle equazioni alle differenze del primo ordine

Abbiamo visto che la soluzione di una equazione alle differenze del primo ordine (2.7) in cui sia assegnata la condizione iniziale y_{n_0} , è data da:

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i, \quad n \geq n_0. \quad (2.19)$$

Possiamo generalizzare questo risultato al caso di equazioni del tipo:

$$y_{n+1} = p_n y_n + g_n, \quad n \geq n_0, \quad y_{n_0} \text{ fissato}, \quad (2.20)$$

in cui le successioni $\{p_n\}$ e $\{g_n\}$ sono note e, inoltre, $p_n \neq 0$, per ogni $n \geq n_0$. Ponendo:

$$P_{n_0} = 1, \quad P_{n+1} = P_n \cdot p_n \equiv \prod_{i=n_0}^n p_i, \quad n \geq n_0, \quad (2.21)$$

si ottiene, dividendo i due membri della (2.20) per P_{n+1} :

$$\frac{y_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{y_n}{P_n} + \frac{g_n}{P_{n+1}}, \quad n \geq n_0.$$

Ponendo

$$z_n = y_n P_n^{-1}, \quad q_n = g_n P_{n+1}^{-1}, \quad n \geq n_0, \quad (2.22)$$

si perviene, infine, all'equazione

$$z_{n+1} = z_n + q_n, \quad n \geq n_0, \quad z_{n_0} = y_{n_0}, \quad (2.23)$$

che è della forma (2.7). La soluzione è, pertanto (vedi (2.19)),

$$z_n = z_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} q_i, \quad n \geq n_0.$$

Tenendo conto delle (2.21)-(2.22), si ottiene:

$$y_n = y_{n_0} P_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i P_{i+1}^{-1} P_n \equiv y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k, \quad n \geq n_0, \quad (2.24)$$

che, evidentemente, soddisfa la condizione iniziale.

Osservazione 2.1 Si dimostra facilmente che l'ultimo membro della (2.24) risulta essere ancora definito, e fornisce una espressione esplicita della soluzione $\{y_n\}$, anche rilassando la condizione $p_n \neq 0$, $n \geq n_0$.

Esercizio 2.5 Risolvere l'equazione

$$y_{n+1} = \left(y_n + \frac{A}{y_n} \right), \quad n \geq 0,$$

dove $y_0 > 0$ e $A > 0$. Determinarne, quindi, il limite per $n \rightarrow \infty$. (Suggerimento: porre $y_n = \sqrt{A} \operatorname{cotgh} z_n$).

Esercizio 2.6 (metodo di Horner) Risolvere l'equazione

$$y_i = x y_{i-1} + b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = b_0, \quad (2.25)$$

in cui $x \in \mathbb{R}$ è assegnato. Dimostrare che $y_n = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$. La (2.25) definisce il metodo di Horner per il calcolo del polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$, con una complessità di $2n$ operazioni algebriche elementari.

2.6 Teoremi del confronto

Oltre alle equazioni alle differenze, è spesso utile, in Analisi Numerica, poter discutere *disequazioni alle differenze*. Alcune di queste, possono essere studiate in modo relativamente semplice mediante il *principio del confronto*, che si applica anche al caso continuo, oltre che a quello discreto. Di seguito, si enunciano i risultati più importanti.

Teorema 2.3 Sia $g(n, y)$ una funzione non decrescente rispetto al secondo argomento. Si considerino, quindi, le seguenti disequazioni alle differenze:

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n), \quad u_{n+1} \geq g(n, u_n), \quad n \geq n_0.$$

Se $y_{n_0} \leq u_{n_0}$, allora: $y_n \leq u_n$, per ogni $n \geq n_0$.

Dimostrazione. Ragionando per induzione, la tesi è vera per $n = n_0$. Supponiamola vera per n , ovvero $y_n \leq u_n$, e dimostriamo per $n + 1$. Si ottiene:

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n) \leq g(n, u_n) \leq u_{n+1},$$

in virtù dell'ipotesi di induzione. \square

Osserviamo che, nel precedente teorema, se si assume una delle due disequazioni essere una equazione alle differenze, la tesi continua a valere. Risolvendo questa equazione, denominata *equazione del confronto*, è possibile ottenere una maggiorazione (o minorazione, a seconda del caso) esplicita per ogni successione che soddisfa l'altra disequazione.

Teorema 2.4 Siano $g(n, i, y)$, non decrescente rispetto ad y , e p_n successioni note. Inoltre, supponiamo che:

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, y_i), \quad u_n \geq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, u_i), \quad n \geq n_0.$$

Allora, $y_n \leq u_n$, per $n \geq n_0$.

Dimostrazione. La tesi è evidentemente vera per $n = n_0$, avendosi

$$y_{n_0} \leq p_{n_0} \leq u_{n_0}.$$

Si supponga vera la tesi fino ad $n - 1$, e dimostriamo per n :

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, y_i) \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n, i, u_i) \leq u_n,$$

in virtù dell'ipotesi di induzione $y_i \leq u_i$, $i = n_0, \dots, n - 1$. \square

Da questi, si ottengono i seguenti corollari.

Corollario 2.2 Siano $p_n \geq 0$ e g_n , per $n \geq n_0$, successioni note. Sia inoltre $\{y_n\}$ tale che:

$$y_{n+1} \leq p_n y_n + g_n, \quad n \geq n_0.$$

Allora:

$$y_n \leq y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k, \quad n \geq n_0.$$

Dimostrazione. La tesi discende immediatamente dalla (2.24), considerando che l'equazione del confronto coincide, in questo caso, con la (2.20). \square

Corollario 2.3 Siano $p_n \geq 0$ e g_n , per $n \geq n_0$, successioni note. Sia inoltre $\{y_n\}$ tale che:

$$y_n \leq y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i y_i + g_i], \quad n \geq n_0.$$

Allora:

$$y_n \leq y_{n_0} \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} p_k\right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k\right), \quad n \geq n_0.$$

Dimostrazione. L'equazione del confronto è:

$$u_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i u_i + g_i], \quad n \geq n_0.$$

Da questa si ottiene che

$$\Delta u_n = p_n u_n + g_n,$$

la cui soluzione è data da (confronta con (2.20) e (2.24))

$$u_n = y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \quad n \geq n_0.$$

La tesi si completa osservando che, essendo $p_k \geq 0$, allora $(1 + p_k) \leq \exp p_k$. \square

Corollario 2.4 (lemma di Gronwall nel discreto) *Siano $p_n \geq 0$ e g_n , per $n \geq n_0$, successioni note e, inoltre,*

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i y_i, \quad n \geq n_0. \quad (2.26)$$

Allora, per $n \geq n_0$:

$$y_n \leq g_{n_0} \exp \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} p_k \right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \exp \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right), \quad (2.27)$$

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right). \quad (2.28)$$

Dimostrazione. La (2.27) discende facilmente considerando l'equazione del confronto

$$u_n = g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i u_i, \quad n \geq n_0,$$

da cui si deduce

$$\Delta u_n = \Delta g_n + p_n u_n, \quad n \geq n_0, \quad u_{n_0} = g_{n_0},$$

ovvero

$$u_{n+1} = (1 + p_n) u_n + \Delta g_n, \quad n \geq n_0, \quad u_{n_0} = g_{n_0}.$$

La soluzione è quindi data da (confrontare con (2.20) e (2.24))

$$u_n = g_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \quad n \geq n_0. \quad (2.29)$$

La (2.27) si ottiene quindi osservando che, essendo $p_k \geq 0$, allora $(1 + p_k) \leq \exp p_k$. Per dimostrare la (2.28), si ponga:

$$v_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} p_k y_k, \quad n \geq n_0.$$

Pertanto la (2.26) diviene:

$$y_n \leq g_n + v_n, \quad n \geq n_0. \quad (2.30)$$

D'altronde, si ha

$$\Delta v_n = p_n y_n \leq p_n g_n + p_n v_n,$$

ovvero:

$$v_{n+1} \leq (1 + p_n)v_n + p_n g_n, \quad n \geq n_0, \quad v_{n_0} = 0.$$

Usando argomenti simili a quelli usati nella dimostrazione del Corollario 2.3 si ottiene, quindi,

$$v_n \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right).$$

La (2.28) si ottiene quindi sostituendo questa espressione al secondo membro della (2.30). \square

Risultati analoghi a quelli visti nel caso discreto valgono nel caso continuo. Si riportano di seguito per completezza, omettendone la dimostrazione.

Teorema 2.5 *Sia $g(t, y)$ continua e Lipschitziana rispetto a y . Se $y(t)$ e $u(t)$ sono due funzioni derivabili tali che*

$$y'(t) \leq g(t, y(t)), \quad u'(t) \geq g(t, u(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

e, inoltre, $y(t_0) \leq u(t_0)$, allora:

$$y(t) \leq u(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Corollario 2.5 (lemma di Gronwall) *Sia*

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds, \quad t \in [t_0, T],$$

essendo $g(t)$ e $p(t)$ funzioni continue assegnate. Allora:

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t p(s)g(s) \exp \left(\int_s^t p(x)dx \right) ds, \quad t \in [t_0, T].$$