

Capitolo 9

Metodi Runge-Kutta

I metodi Runge-Kutta (RK) costituiscono una alternativa ai metodi LMF per superare le barriere di ordine di Dahlquist. Li tratteremo in modo semplificato, applicati al problema

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (9.1)$$

sebbene con questo non si perda in generalità, in quanto il tempo può essere incluso nel vettore di stato. Partendo dal teorema fondamentale del calcolo, si ha:

$$y(h) = y(0) + \int_0^h f(y(s)) ds.$$

Approssimando l'integrale con una formula di quadratura su s nodi $\{c_i\}$ e pesi $\{b_i\}$, si ottiene

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_i), \quad (9.2)$$

dove gli *stadi* $Y_i \approx y(c_i h)$, $i = 1, \dots, s$. Approssimando anche questi con corrispondenti formule di quadratura, si ottiene:

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j), \quad i = 1, \dots, s. \quad (9.3)$$

Le formule (9.2)–(9.3) definiscono un *metodo Runge-Kutta a s-stadi*. Questo è altresì caratterizzato dal cosiddetto *tableau di Butcher* (o *Butcher array*):

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array} \quad (9.4)$$

in cui

$$\mathbf{b} = (b_i), \quad \mathbf{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^s, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}.$$

Riguardo alla loro complessità computazionale, si distinguono i seguenti casi significativi:

metodo RK esplicito: in questo caso la matrice A è strettamente triangolare inferiore (ovvero, $a_{ij} = 0$, se $j \geq i$). In tal caso, la (9.3) diviene

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(Y_j), \quad i = 1, \dots, s, \quad (9.5)$$

ovvero gli stadi Y_i si ottengono in sequenza mediante sostituzioni successive;

metodo RK semi-implicito: in questo caso la matrice A è triangolare inferiore (ovvero, $a_{ij} = 0$, se $j > i$). In tal caso, la (9.3) diviene

$$Y_i - ha_{ii}f(Y_i) = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}f(Y_j), \quad i = 1, \dots, s, \quad (9.6)$$

ovvero gli stadi $\{Y_i\}$ si ottengono risolvendo s equazioni nonlineari;

metodo RK implicito: in questo caso la matrice A non ha struttura di sparsità. In tal caso, la (9.3) diviene

$$Y - hA \otimes I f(Y) = e \otimes y_0, \quad (9.7)$$

dove abbiamo indicato con Y il vettore a blocchi contenete gli stadi, e con e il vettore unitario in \mathbb{R}^s . In tal caso, gli stadi Y_i si ottengono risolvendo un sistema di s equazioni nonlineari.

Ci si convince facilmente che, sotto ipotesi minime su f , le equazioni (9.6) e (9.7) ammettono sempre soluzione, e questa è unica, per h sufficientemente piccolo.

Ordine di un metodo Runge-Kutta

Riguardo all'ordine di accuratezza, il metodo si dirà avere ordine p se, $y(h) - y_1 = O(h^{p+1})$ (assumendo che f sia di classe $C^{(p+1)}$). Si dimostra che l'ordine massimo di un metodo RK a s stadi non può eccedere $2s$. Tuttavia, le condizioni sui coefficienti del tableau (9.4) per ottenere un metodo di ordine p divengono assai complicate e numerose, al crescere dell'ordine p . Infatti, se indichiamo con $n(p)$ il numero delle condizioni per esso richieste, si può costruire la seguente tabella:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n(p)$	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Un classico esempio di metodo Runge-Kutta esplicito è dato seguente metodo di ordine 4, descritto dal *tableau*:

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Analisi di stabilità lineare per un metodo Runge-Kutta

Un metodo Runge-Kutta è 0-stabile per costruzione. Infatti, si tratta di un metodo *one-step* per cui (vedi (9.2)) $\rho(z) = z - 1$. Se si considera, invece, l'equazione test $y' = h\lambda y$, e ponendo, al solito, $q = h\lambda$, dalle (9.2) e (9.3) si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} I - qA & 0 \\ -q\mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} y_0.$$

Applicando la regola di Kramer, si ottiene, pertanto:

$$y_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} I - qA & e \\ -q\mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix}}{\det(I - qA)} y_0 = \frac{\det(I - qA + qe\mathbf{b}^T)}{\det(I - qA)} y_0 \equiv R(q)y_0.$$

La funzione razionale $R(q)$ è detta *funzione di stabilità*. La regione di assoluta stabilità del metodo sarà pertanto definita da

$$\mathcal{D} = \{q \in \mathbb{C} : |R(q)| < 1\}.$$

Il metodo sarà, al solito, A -stabile se $\mathbb{C}^- \subseteq \mathcal{D}$. Osserviamo che, per un metodo esplicito, $R(q)$ è un polinomio di grado s e, pertanto, $R(q) \rightarrow \infty$ per $q \rightarrow \infty$. Pertanto, la regione di assoluta stabilità di un metodo RK esplicito è limitata. Questo sarà altresì vero quando il grado del denominatore di $R(q)$ è inferiore a quello del numeratore.

Per ottenere metodi A -stabili, sono richieste ulteriori condizioni sui coefficienti del tableau (9.4), ed il metodo deve essere implicito. Sebbene le formule Gaussiane a s stadi, che hanno ordine massimo $2s$, sono perfettamente A -stabili, è tuttavia difficile, in generale, ottenere in modo immediato dei metodi RK A -stabili.

Cercheremo di ovviare all'inconveniente di non poter derivare in modo semplice metodi A -stabili e di ordine elevato, utilizzando un diverso approccio per definire dei metodi di approssimazione per il problema (9.1).

9.1 Sviluppo di Fourier locale

9.2 Problemi Hamiltoniani

scaricare lavoro al seguente link:

[http://web.math.unifi.it/users/brugnano/papers/amc \(2012\) to appear.pdf](http://web.math.unifi.it/users/brugnano/papers/amc (2012) to appear.pdf)

(Referenza completa: L.Brugnano, F.Iavernaro, D.Trigiane. A simple framework for the derivation and analysis of effective one-step methods for ODEs. *Applied Mathematics and Computation* **218** (2012) 8475–8485.)